ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von L. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, Th. v. KÁRMÁN-Aachen, R. MOLLIER-Dresden, L. PRANDTL-Göttingen, H. REISSNER-Charlottenburg, R. RÜDENBERG-Berlin

INHALT:



Z. angew. Mathem. u. Mech. / Berlin, Mai/Juni 1930 / Band 10 / Nr. 3 / Seite 209–312

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 10 | Juni 1930 | Heft 3

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Spannungen in wandartigen Balken bei feldweise wechselnder Belastung.[1]

Von **HERM. CRAEMER** in Frankfurt a. M. und Darmstadt.

1. Problemstellung. Abb. 1b zeigt eine sehr häufige, auf Verkennung der statischen Wirkungsweise beruhende Ausführungsform von Eisenbetonbunkern. Infolge der fugenlosen (monolithischen) Verbindung von Wand und Balken tragen diese nämlich gemeinsam; wegen des großen Tragvermögens der ersteren kann daher der letztere überhaupt entbehrt werden[2]). Die Wand wirkt dann als meist stark gedrungener Rechteckbalken, s. Abb. 1a, für den die Naviersche Theorie nicht mehr gültig ist.

Im folgenden sollen daher die Spannungen der Wand für den wichtigsten Fall einer innerhalb der Spannweite gleichbleibenden, am oberen oder unteren Rande angreifenden, Belastung untersucht werden. Die Wandstärke b sei konstant; das Hookesche Gesetz habe Geltung.

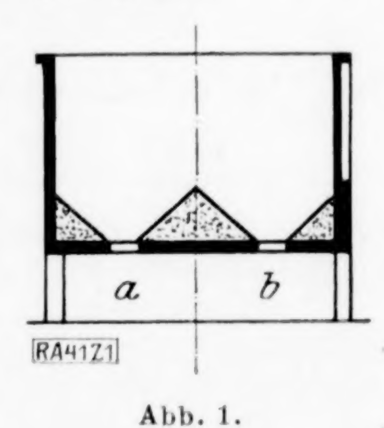


Abb. 1.

Die für die größte Beanspruchung in Feldmitte maßgebende Belastung mit g in sämtlichen, $g+p$ in jedem zweiten Felde (g ständige, p nicht-ständige Last), läßt sich bekanntlich zerlegen in eine gleichbleibende Belastung $g+p/2$ und eine feldweise abwechselnd wirkende Belastung $+p/2$, $-p/2$ usw. Der erstere Fall ist vom Verfasser in einer noch nicht veröffentlichten Arbeit behandelt worden; hier soll der zweite Fall untersucht werden.

Die Spannungen σ_x, τ, σ_y können genau genug als über b gleichmäßig verteilt angenommen werden. Den Gleichgewichtsbedingungen zwischen den Spannungsresultanten s_x, t, s_y läßt sich dann durch Einführung einer durch

$$s_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad t = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}, \quad t_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

definierten Spannungsfunktion Rechnung tragen.

[1]) Als Habilitationsschrift genehmigt von der Technischen Hochschule Darmstadt (Referent Herr Prof. Dr. Schlink, Korreferent Herr Prof. Dr.-Ing. Kammer).

[2]) Craemer, Scheiben und Faltwerke als neue Konstruktionselemente des Eisenbetonbaues. Beton u. Eisen 1929, Heft 13, 14 und 18.

Die geometrische Verträglichkeit der entstehenden Formänderungen fordert ferner bei Abwesenheit von Massenkräften

$$\Delta (s_x + s_y) = \Delta \Delta F = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

2. Die Naviersche Biegungstheorie. Mit den Abkürzungen

$$\xi = \frac{2x}{l}, \quad \eta = \frac{2y}{h}, \quad \alpha = h:l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ist, wenn p die abwärts positive Belastung je Längeneinheit

$$s_x = -\frac{0,75\,\eta\,(1-\xi^2)}{\alpha^2}\,p, \quad t = -\frac{0,75\,\xi\,(1-\eta^2)}{\alpha}\,p, \quad s_y = \pm 0,5\,(1 \mp 1,5\,\eta \pm 0,5\,\eta^3)\,p \quad (2\,\mathrm{a, b, c}),$$

letzteres je nachdem, ob p an der Unter- oder Oberseite des Balkens angreift; (2a) und (2b) sind dagegen von dieser Unterscheidung unabhängig. Es läßt sich leicht zeigen, daß zwischen den Spannungen (2) Gleichgewicht besteht. Dagegen erhält man $\Delta (s_x + s_y) = + \frac{12\,\eta\,p}{h^2}$; es besteht also keine Verträglichkeit.

Die Schubspannungen bewirken bekanntlich eine S-förmige Verwölbung ursprünglich ebener Querschnitte. Diese Querschnittswölbung an sich ist zwar noch kein Hindernis für eine lineare Verteilung der Biegungsspannungen nach (2a). (In den meisten Lehrbüchern wird, wohl der einfacheren Herleitung wegen, das Ebenbleiben der Querschnitte als Bedingung für lineare Spannungsverteilung hingestellt.) Hierfür ist vielmehr (abgesehen von der Querdehnung) nur eine lineare Verteilung der Dehnungen ε_x, nicht aber der absoluten wagerechten Verschiebungen notwendig.

Sind dagegen die Balkenränder belastet, d. h. τ mit ξ veränderlich, so entsteht eine veränderliche Querschnittswölbung, die mit linearer Verteilung der σ_x nicht verträglich ist[1]. Da nun die τ mit wachsendem α gegenüber den σ_x zunehmen, wird die Naviersche Lehre um so mehr einer Erweiterung bedürfen, je gedrungener der betrachtete Balken ist, da dann die Querschnittswölbung gegenüber den sonstigen Verformungen immer mehr ins Gewicht fällt.

3. Die erweiterte Biegungstheorie von Mesnager.[2] Für den einspannungsfreien, an seinen Endquerschnitten durch Schubspannungen gestützten Rechteckbalken gibt Mesnager[3] die Biegungsspannungen zu

$$s_x = -\frac{0,75\,\eta}{\alpha^2}\left[(1-\xi^2) + 2\,\alpha^2\,(1/3\,\eta^2 - 1/5)\right]p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

an, während er die Gl. (2b, 2) und (2c, 2) unverändert läßt (die Zahl 2 verweist auf den Abschnitt); er überlagert also den Navierschen Biegungsspannungen ein über die Balkenlänge gleichbleibendes Spannungssystem,

$$s_x' = -1,5\,\eta\,(1/3\,\eta^2 - 1/5)\,p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Da $\frac{\partial s'_x}{\partial x} = 0$, so wird am Gleichgewicht des Elementes nichts geändert. Wegen $\Delta s_x' = -\frac{12\,\eta}{h^2}\,p$ wird ferner durch die Ueberlagerung von (2) die bei Navier fehlende Verträglichkeit hergestellt. Es bleibt aber die Erfüllung der Randbedingungen an den Schmalseiten zu prüfen.

Hierbei müssen wir diejenigen Fälle ausscheiden, wo ein einzelnes Balkenfeld in der Nähe der Endquerschnitte durch auf seine Unterseite wirkende, stark konzentrierte Druckspannungen gestützt ist, also im eigentlichen Wortsinne »auf« seiner Unterstützung ruht. Wir beschränken uns also, falls es sich um einfeldrige Balken handelt, auf eine Stützungsart ähnlich derjenigen eines zwischen zwei Unterzüge »eingehängten« Stichbalkens oder auch von Querwänden einreihiger Bunker nach Abb. 2, die ihre Belastung in Form von lotrechten Schubspannungen an die beiden Längswände abgeben.

[1] Auch bei in zwei Richtungen gebogenen Platten nehmen die Biegungsspannungen für beliebige Verhältnisse von Dicke zu Spannweite geradlinig zu, sofern die Oberflächen frei von Last und etwaige Randbelastungen parabolisch eingetragen sind, trotzdem ein die Platte senkrecht durchstoßender Strahl nicht gerade bleibt. Siehe Craemer, Beton u. Eisen 1929, S. 12.

[2] In meinem Vortrag »Spannungen in hohen, wandartigen Trägern unter besonderer Berücksichtigung des Eisenbetonbunkerbaus« auf der 2. Internat. Tagung für Brücken- und Hochbau, Wien 1928, habe ich diese Theorie irrtümlich de St. Venant zugeschrieben.

[3] Ann. ponts chaussees 1901, II, S. 161.

Bei mehrfeldrigen Balken unter Wechsellast werden an den inneren Stützen die Auflagerdrücke Null, so daß dort das Gleichgewicht wiederum durch Schubspannungen hergesellt wird. Für die letzte Stütze eines Endfeldes wollen wir ebenfalls eine Stützungsart ähnlich der nach Abb. 2 annehmen.

Aus (1) ersieht man nun, daß an den Schmalseiten $\xi = \pm 1$ die s_x nicht verschwinden, sondern die Korrekturspannungen s_x' bestehen bleiben. Diese Spannungen aber sind in Wirklichkeit nicht vorhanden. So z. B. würde eine dünne Längswand, unter quer zu ihr gerichteten, von einer Querwand herrührenden Normalspannungen s_x' solange ausweichen, bis diese praktisch verschwunden sind.

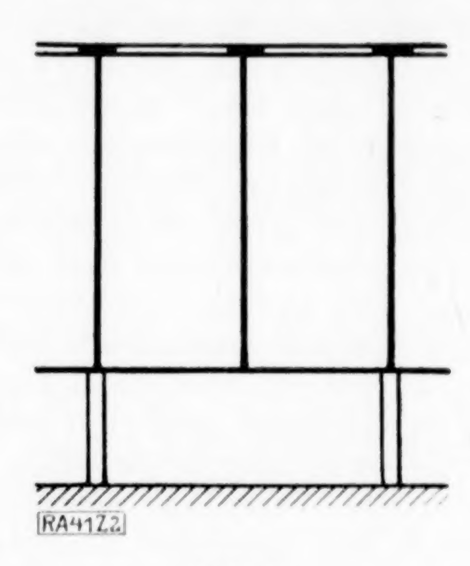


Abb. 2.

Für mehrere Felder vollends würde man, je nachdem ob man den Auflagerquerschnitt dem aufwärts oder abwärts belasteten Felde zuordnet, die s_x' mit verschiedenen Vorzeichen erhalten, also auf Widersprüche stoßen.

Im Falle unendlich vieler Felder müssen diese Spannungen nun aus Periodizitätsgründen verschwinden. Auch für geringere Felderzahl sowie für die Endfelder bei großer Felderzahl wird die Annahme $s_x = 0$ für $\xi = \pm 1$ an den inneren Stützen der Wirklichkeit nahe kommen.

Man könnte nun ein Spannungssystem »$-s_x'$« in den Schmalseiten anbringen, damit diese frei von Normalspannungen werden. Eine Antwort auf die Frage, welche Spannungen hierdurch im Inneren des Balkens entstehen, ist aber bis jetzt nicht bekannt. Wegen $\frac{h}{2}\int_{-1}^{+1} s_x'\, d\eta = 0$ (Normalkraft) und $\frac{h^2}{4}\int_{-1}^{+1} s_x'\,\eta\, d\eta = 0$ (Moment) bilden allerdings die s_x' eine Gleichgewichtsgruppe. Nach dem St. Venantschen Prinzip ruft eine solche nun, wenn sie in einem engen Bezirk angreift, nur in geringer Entfernung von der Angreifstelle Spannungen von nennenswertem Betrage hervor. Dieses Prinzip hat einen sehr weiten Gültigkeitsbereich und verdient daher volles Vertrauen[1]). Es wurde denn auch zum Beweis der Brauchbarkeit von Gl. (1) herangezogen, aber mit Unrecht.

Für einen Balken beispielsweise mit einem Schlankheitsverhältnis $\alpha = h : l = 1$ wird sich der Einfluß der an den Endquerschnitten anzubringenden $-s_x'$ unbedingt bis in die Mitte der Spannweite erheblich bemerkbar machen. Da wir diesen Einfluß nicht rechnerisch erfassen können, ist für $\alpha = 1$ und erst recht für noch gedrungenere Balken die Gl. (1) abzulehnen. Für schlankere Balken besteht diese Unbrauchbarkeit wenigstens in der Nähe der Enden, etwa bis zu einem Abstand, der gleich der Balkenhöhe ist, so daß für $\alpha = 1:2$ auch in Feldmitte (1) nicht ohne weiteres als richtig hingenommen werden kann. Nun ist aber für dieses Schlankheitsverhältnis mit $\xi = 0$, $\eta = \pm 1$, $s_x(0, \pm 1) = \mp 3 \cdot \frac{16}{15} p$ gegenüber $s_x = \mp 3{,}0\, p$ nach Navier, d. h. die Abweichung beträgt nur $6^2/_3$ vH; sie ist also etwa von der Größenordnung des aus den unzutreffenden Normalspannungen der Endquerschnitte herrührenden Fehlers. Für noch schlankere Balken bleibt in der Nähe der Endquerschnitte die Unbrauchbarkeit aus den früher dargelegten Gründen, während nahe Balkenmitte die Abweichung noch geringer wird, so daß man ebenso gut nach Navier rechnen kann.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die Mesnagersche Lösung für schlanke Balken in der Gegend der Feldmitte gegenstandslos und an den Enden unbrauchbar, für gedrungene Balken dagegen überhaupt unbrauchbar ist. Uebrigens haben bereits A. und L. Föppl[2]) sich nicht in jeder Hinsicht mit dieser Theorie einverstanden erklärt. In der folgenden eigenen Lösung wird daher $s_x(\pm 1, \eta) = 0$ als Randbedingung zugrunde gelegt werden; sie ist für unendlich viele Felder streng, für Endfelder und Einzelfelder annähernd gültig.

Für die Ober- und Unterseite des Balkens gilt $s_y(\xi, +1) = -p$ oder $s_y(\xi, -1) = +p$ bzw. umgekehrt im Nachbarfelde, je nachdem die Last am oberen oder unteren Rande angreift, sowie $t(\xi, +1) = t(\xi, -1) = 0$. Diese Bedingungen sind auch bei Navier und Mesnager erfüllt.

[1]) Siehe z. B. Biezeno-Koch, De Ingenieur 1923, S. 25 und Craemer, Beton u. Eisen 1928, S. 382, wo es mit großem Vorteil für die Theorie der Platten verwandt wurde.

[2]) Drang und Zwang. München 1920.

4. Die weiteren Randbedingungen für die Auflagerquerschnitte. Mit der Festlegung $s_x(\pm 1, \eta) = 0$ ist über die freien Randbedingungen für die Querschnitte $\xi = \pm 1$ noch nicht vollständig verfügt. Mesnager wählt seine Lösung so, daß die Schubspannungen in $\xi = \pm 1$ parabolisch verlaufen, ohne aber darauf einzugehen, daß längs dieses Randes noch eine Randbedingung offen ist und den tatsächlichen Verhältnissen entsprechend gewählt und begründet werden muß. Als Folge ergibt sich dann parabolische Verteilung auch in allen übrigen Querschnitten. Es ist notwendig, ausdrücklich darauf hinzuweisen, daß demnach diese Verteilung der t nicht Rechnungsergebnis, sondern Rechnungsgrundlage ist. Eine einfache Betrachtung zeigt, daß diese Annahme den Tatsachen widerspricht.

Im extremen Fall eines Schachtsilos mit $h:l$ etwa gleich 10 wird eine feldweise auf- und abwirkende, unten angehängte Belastung (Bodenlast) bestimmt nicht durch Schubspannungen gestützt werden, die symmetrisch über die ganze riesige Balkenhöhe verteilt sind, sondern der Kraftschluß wird sich nach dem St. Venantschen Prinzip den näheren Weg über die unteren Partien der Wand suchen. Die parabolische Verteilung der Schubspannungen ist also eine durch nichts gestützte Annahme. Ueber die tatsächliche Verteilung allerdings kann zunächst nichts Genaueres gesagt werden, sie wird wesentlich von der Angriffsweise der Belastung p abhängen.

Zwecks Verfügung über die noch freie Randbedingung in $\xi = \pm 1$ betrachten wir die lotrechten Dehnungen ε_y. Für unendliche Felderzahl werden diese aus Periodizitätsgründen ebenso wie s_x verschwinden. Wegen $s_x = 0$ ist dies, auch bei endlicher Querdehnung, gleichbedeutend mit $s_y = 0$.

Bei Einzelfeldern allerdings wird die Größe von ε_y am Uebergang in den stützenden Konstruktionsteil (z. B. Längswand nach Abb. 2) nicht unwesentlich von den Abmessungen und der Lagerungsart des letzteren abhängen. Je nach dem elastischen Widerstand, den dieser einer lotrechten Dehnung an der betreffenden Stelle entgegensetzt, wird er die Formänderung des gestützten Teiles an der Anschlußstelle mehr oder minder hemmen und bei genügender Steifigkeit bis auf Null herabdrücken, in letzterem Fall wäre also auch für die Endquerschnitte von Einzelfeldern $\varepsilon_y = 0$ zu setzen.

Dasselbe gilt für die Endquerschnitte bei mehreren durchgehenden Feldern. Die Verteilung der ε_y im Endquerschnitt wird dann den Spannungszustand bis zu einer Entfernung von diesen beeinflussen, die von der Balkenhöhe abhängt, also bei schlankeren Balken höchstens im ersten, bei stark gedrungenen auch in den weiteren Feldern.

Für die folgende eigene Lösung soll nun auch für die Endquerschnitte als Randbedingung $\varepsilon_y = 0$ gesetzt werden. Nachdem so die Rechnungsgrundlagen vervollständigt sind, werden wir als Rechnungsergebnis auch die Verteilung der Schubspannung finden. Die gewählte Randbedingung ist, wie erörtert, bei unendlicher Felderzahl streng, bei End- und Einzelfeldern näherungsweise gültig. Für letztere muß eine Erweiterung der Theorie unter Berücksichtigung der Steifigkeit der Unterstützung vorbehalten werden.

5. Aufstellung der neuen Lösung. Wir wählen als Spannungsfunktion

$$F = \frac{4p}{\pi^3} \sum \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3} \cos \xi_n \left[\frac{(\gamma_n \operatorname{Cos} \gamma_n + \operatorname{Sin} \gamma_n) \operatorname{Cos} \eta_n - \operatorname{Sin} \gamma_n \cdot \eta_n \operatorname{Sin} \eta_n}{2\gamma_n + \operatorname{Sin} 2\gamma_n} - \frac{(\gamma_n \operatorname{Sin} \gamma_n + \operatorname{Cos} \gamma_n) \operatorname{Sin} \eta_n - \operatorname{Cos} \gamma_n \, \eta_n \operatorname{Cos} \eta_n}{2\gamma_n - \operatorname{Sin} 2\gamma_n} \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\xi_n = \frac{n \pi x}{l}, \quad \eta_n = \frac{n \pi y}{l}, \quad \gamma_n = \frac{n \pi h}{2l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

n sind die ungeraden Zahlen, das Koordinatensystem ist dasselbe wie in den vorigen Abschnitten. Dann ist, wenn man $(-1)_n$ statt $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ schreibt,

$$s_x = \frac{4p}{\pi} \sum \frac{(-1)_n}{n} \cos \xi_n \left[\frac{(\gamma_n \operatorname{Cos} \gamma_n - \operatorname{Sin} \gamma_n) \operatorname{Cos} \eta_n - \operatorname{Sin} \gamma_n \, \eta_n \operatorname{Sin} \eta_n}{2\gamma_n + \operatorname{Sin} 2\gamma_n} - \frac{(\gamma_n \operatorname{Sin} \gamma_n - \operatorname{Cos} \gamma) \operatorname{Sin} \eta_n - \operatorname{Cos} \gamma_n \, \eta_n \operatorname{Cos} \eta_n}{2\gamma_n - \operatorname{Sin} 2\gamma_n} \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3\,a),$$

$$t = \frac{4p}{\pi} \sum \frac{(-1)_n}{n} \sin \xi_n \left[- \frac{\gamma_n \operatorname{Cos} \gamma_n \operatorname{Sin} \eta_n - \operatorname{Sin} \gamma_n \, \eta_n \operatorname{Cos} \eta_n}{2\gamma_n + \operatorname{Sin} 2\gamma_n} + \frac{\gamma_n \operatorname{Sin} \gamma_n \operatorname{Cos} \eta_n - \operatorname{Cos} \gamma_n \, \eta_n \operatorname{Sin} \eta_n}{2\gamma_n - \operatorname{Sin} 2\gamma_n} \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3\,b),$$

$$s_y = \frac{4p}{\pi} \Sigma \frac{(-1)_n}{n} \cos \xi_n \left[-\frac{(\gamma_n \mathfrak{Cof}\, \gamma_n + \mathfrak{Sin}\, \gamma_n) \mathfrak{Cof}\, \eta_n - \mathfrak{Sin}\, \gamma_n\, \eta_n\, \mathfrak{Sin}\, \eta_n}{2\gamma_n + \mathfrak{Sin}\, 2\gamma_n} + \frac{(\gamma_n \mathfrak{Sin}\, \gamma_n + \mathfrak{Cof}\, \gamma_n) \mathfrak{Sin}\, \eta_n - \mathfrak{Cof}\, \gamma_n\, \eta_n\, \mathfrak{Cof}\, \eta_n}{2\gamma_n - \mathfrak{Sin}\, 2\gamma} \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3\,c).$$

Da, wie man sich durch Derivation leicht überzeugen kann, F der Bedingung (1, 1) genügt, ist Gleichgewicht und Verträglichkeit vorhanden.

Die in 3 und 4 eingehend erörterten Randbedingungen für die Auflagerquerschnitte, nämlich $s_x(\pm 1, \eta) = 0$ und $s_y(\pm 1, \eta) = 0$ sind laut (3 a) und (3 c) wegen $\cos \frac{n\pi}{2} = 0$ befriedigt. Die Bedingung für das Verschwinden der Schubspannungen in den Balkenrändern $t(\xi, \pm 1) = 0$ ist ebenfalls erfüllt, da für $\eta = \pm {}^1/_2$, d. h. $\eta_n = \pm \gamma_n$ die eckigen Klammern in (3 b) zu null werden.

Die zugrunde gelegte wechselnde Belastung, nämlich $p(x) = +p$ für $-l/2 < x < +l/2$ usw. und $p(x) = -p$ für $+l/2 < x < +3l/2$ usw. lautet, nach einer Fourierschen Reihe entwickelt $p(x) = \frac{4p}{\pi} \Sigma \frac{(-1)_n}{n} \cos \xi_n$.

Für den Fall oben angreifender Last wird nun $s_x(\xi, +1) = -p(x)$; setzt man in (3) $\eta_n = \gamma_n$, so sieht man, daß auch diese Bedingung erfüllt ist. Endlich geht noch für $\eta_n = -\gamma_n$ (3) über in $s_x(\xi, -1) = 0$, womit sämtliche Randbedingungen erledigt sind.

Im Falle unten angreifender Belastung erhält man sinngemäß

$$s_x' = \frac{4p}{\pi} \Sigma \frac{(-1)_n}{n} \cos \xi_n \left[-\frac{(\gamma\, \mathfrak{Cof}\, \gamma_n - \mathfrak{Sin}\, \gamma) \mathfrak{Cof}\, \eta_n - \mathfrak{Sin}\, \gamma_n\, \eta_n\, \mathfrak{Sin}\, \eta_n}{2\gamma_n + \mathfrak{Sin}\, 2\gamma} - \frac{(\gamma_n \mathfrak{Sin}\, \gamma_n - \mathfrak{Cof}\, \gamma_n) \mathfrak{Sin}\, \eta_n - \mathfrak{Cof}\, \gamma_n\, \eta_n\, \mathfrak{Cof}\, \eta}{2\gamma_n - \mathfrak{Sin}\, 2\gamma_n} \right] \quad . \quad . \quad . \quad (4\,a),$$

$$t' = \frac{4p}{\pi} \Sigma \frac{(-1)_n}{n} \sin \xi_n \left[\frac{\gamma_n \mathfrak{Cof}\, \gamma_n\, \mathfrak{Sin}\, \eta_n - \mathfrak{Sin}\, \gamma_n\, \eta_n\, \mathfrak{Cof}\, \eta_n}{2\gamma_n + \mathfrak{Sin}\, 2\gamma_n} + \frac{\gamma_n \mathfrak{Sin}\, \gamma_n\, \mathfrak{Cof}\, \eta_n - \mathfrak{Cof}\, \gamma_n\, \eta_n\, \mathfrak{Sin}\, \eta_n}{2\gamma_n - \mathfrak{Sin}\, 2\gamma_n} \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4\,b),$$

$$s_y' = \frac{4p}{\pi} \Sigma \frac{(-1)_n}{n} \cos \xi_n \left[\frac{(\gamma_n \mathfrak{Cof}\, \gamma_n + \mathfrak{Sin}\, \gamma_n) \mathfrak{Cof}\, \eta_n - \mathfrak{Sin}\, \gamma_n\, \eta_n\, \mathfrak{Sin}\, \eta_n}{2\gamma_n + \mathfrak{Sin}\, 2\gamma_n} + \frac{(\gamma\, \mathfrak{Sin}\, \gamma_n + \mathfrak{Cof}\, \gamma_n) \mathfrak{Sin}\, \eta_n - \mathfrak{Cof}\, \gamma_n\, \eta_n\, \mathfrak{Cof}\, \eta_n}{2\gamma_n - \mathfrak{Sin}\, 2\gamma_n} \right] \quad . \quad . \quad . \quad (4\,c).$$

Des theoretischen Interesses halber sei noch der Fall betrachtet, daß die Belastung je zur Hälfte oben und unten angreift; die Spannungen bilden dann das arithmetische Mittel aus den Fällen (3) und (4), d. h.

$$s_x'' = -\frac{4p}{\pi} \Sigma \frac{(-1)_n}{n} \cos \xi_n \frac{(\gamma_n \mathfrak{Sin}\, \gamma_n - \mathfrak{Cof}\, \gamma_n) \mathfrak{Sin}\, \eta_n - \mathfrak{Cof}\, \gamma_n\, \eta_n\, \mathfrak{Cof}\, \eta_n}{2\gamma_n - \mathfrak{Sin}\, 2\gamma_n} \quad . \quad (5\,a),$$

$$t'' = \frac{4p}{\pi} \Sigma \frac{(-1)_n}{n} \sin \xi_n \frac{\gamma_n \mathfrak{Sin}\, \gamma_n\, \mathfrak{Cof}\, \eta_n - \mathfrak{Cof}\, \gamma_n\, \eta_n\, \mathfrak{Sin}\, \eta_n}{2\gamma_n - \mathfrak{Sin}\, 2\gamma_n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5\,b),$$

$$s_y'' = \frac{4p}{\pi} \Sigma \frac{(-1)_n}{n} \cos \xi_n \frac{(\gamma_n \mathfrak{Sin}\, \gamma_n + \mathfrak{Cof}\, \gamma_n) \mathfrak{Sin}\, \eta_n - \mathfrak{Cof}\, \gamma_n\, r_n\, \mathfrak{Cof}\, \eta_n}{2\gamma_n - \mathfrak{Sin}\, 2\gamma_n} \quad . \quad . \quad (5\,c).$$

6. Auswertung der Formeln. Um die Spannungsbilder längs bestimmter Linien, sowie die Abhängigkeit der Spannungen an bestimmten Punkten vom Schlankheitsgrad auftragen zu können, wurden die Gl. (3, 5), (4, 5) und (5, 5) durch Einsetzen der betreffenden Werte von ξ_n und η_n spezialisiert. Die Rechnung, bei der von den Beziehungen der hyperbolischen Funktionen untereinander Gebrauch gemacht wurde, enthält nichts Bemerkenswertes, so daß auch die Wiedergabe der erhaltenen Formeln entfallen kann. Nur auf einige Besonderheiten soll aufmerksam gemacht werden. Unten angreifende Last ist dabei durch Beigabe eines, hälftig verteilte Belastung durch 2 Striche gekennzeichnet.

So erhält man für die Biegungsspannung im belasteten Rande

$$s_x(\xi, +1) = -s_x'(\xi, -1) = \frac{4p}{\pi} \Sigma \frac{(-1)_n}{n} \cos \xi_n \frac{4\gamma_n^2 + \mathfrak{Sin}^2\, 2\gamma_n}{4\gamma_n^2 - \mathfrak{Sin}^2\, 2\gamma_n} \quad . \quad . \quad . \quad (1);$$

wegen

$$p(x) = \frac{4p}{\pi} \Sigma \frac{(-1)_n}{n} \cos \xi_n$$

läßt sich dies durch Zerlegen des Zählers in $-4\gamma_n^2 + \mathfrak{Sin}^2\, 2\gamma_n + 8\gamma_n^2$ und Abspalten der beiden ersten Glieder auf die viel rascher konvergierende Form

$$s_x(\xi, +1) = -s_x'(\xi, -1) = p(x) + \frac{8\,p}{\pi}\,\Sigma\,\frac{(-1)^n}{n}\cos\xi_n\,\frac{4\gamma_n^2}{4\gamma_n^2 - \mathfrak{Sin}^2\,2\gamma_n} \quad . \quad (1\,a)$$

bringen. Eine gleiche Umformung läßt sich für $s_x''(\xi, \pm 1)$ durchführen.

Die von außen aufgebrachte Last, also $s_y(\xi, +1)$ bzw. $s_y'(\xi, -1)$ hat bei $\xi = \pm 1$ eine Unstetigkeit; als Folge derselben entstehen Unstetigkeiten auch in s_x und t. Für die unendliche Halbscheibe gilt nun bei einer Belastung nach Abb. 3 nach Michell

$$s_r = +p/\pi\,(2\,\varphi - \pi + \sin 2\,\varphi);\quad t = p/\pi\,(1 - \cos 2\,\varphi) \quad . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Nähert man sich von links her auf der Geraden $y = 0$ der Unstetigkeitsstelle, so erhält man wegen $\varphi = 0$ unabhängig von x

$$s_r = s_x = -p \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2\,a),$$

dagegen von rechts kommend

$$s_r = s_x = +p \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2\,b);$$

bei $x = y = 0$ (Koordinaten der Abb. 3!) springt s_x also um denselben Betrag wie s_y, nämlich um $2\,p$.

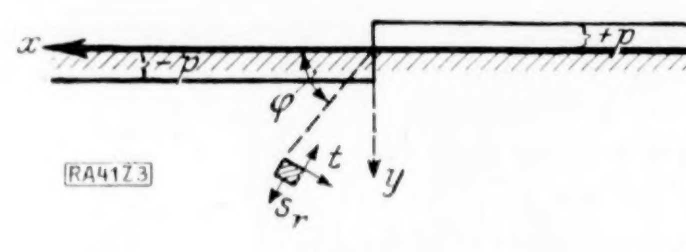


Abb. 3.

Bei endlicher Höhe sind zwar die umgekehrten Werte der aus (2) längs $y = h$ sich ergebenden Spannungen dort anzubringen, um diese Begrenzung spannungsfrei zu machen; doch wird hierdurch der Verlauf von s_x längs $y = 0$ nur durch Ueberlagerung stetiger Spannungen verändert, so daß die Unstetigkeit in $x = y = 0$ in gleicher Höhe bestehen bleibt. Ebenso wird durch die in Wirklichkeit bestehende Begrenzung der Belastung $\pm p$, in $x = \pm l$ usw., zwar an der Stelle dieser Begrenzung eine neue Unstetigkeit, sowie eine stetige Abänderung der s_x längs $y = 0$ hervorgerufen; das Maß der Unstetigkeit in $x = y = 0$ bleibt dabei aber dasselbe.

Die Schubspannungen erhält man längs $y = 0$ auf beiden Seiten von $y = 0$ bis unmittelbar vor und hinter diesem Punkt zu $t = 0$. Nähert man sich dagegen der Unstetigkeitsstelle auf der Geraden $x = 0$, so wird

$$t = \frac{2\,p}{\pi} \quad . \; . \quad (2\,c),$$

und zwar unabhängig von y, also auch in $x = y = 0$. Selbstverständlich handelt es sich hier um die im Schnitt $x = 0$ an der Stelle $y = 0$ lotrecht wirkende Schubspannung; die längs der Oberfläche $y = 0$ in $x = 0$ wirkende Schubspannung ist Null. Das Gesetz von der Gleichheit der Schubspannungen in aufeinander senkrecht stehenden Schnitten ist infolge der Unstetigkeit hier durchbrochen.

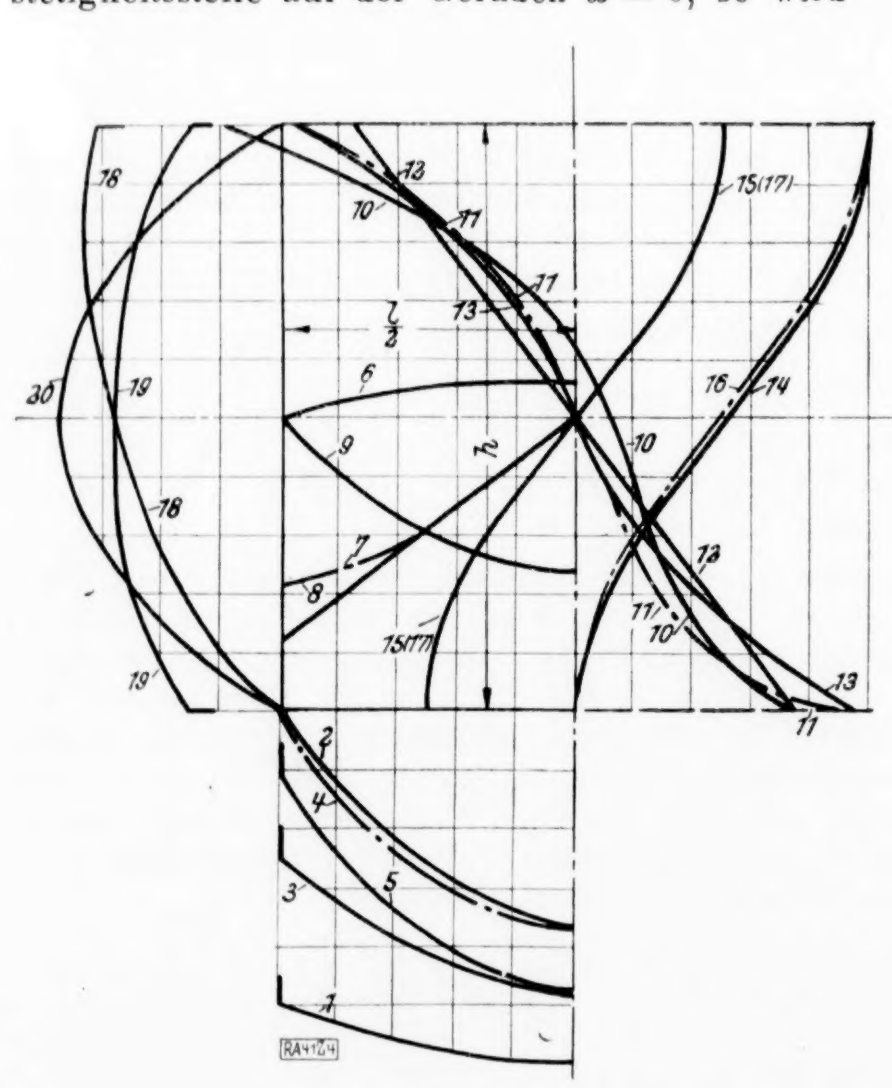


Abb. 4.

7. Spannungsbilder für $h = l$ und Diskussion.

Um einen Einblick in das Wesen des in 5 und 6 erfaßten Spannungszustandes zu bekommen, insbesondere um Art und Grad der Abweichung von der Navierschen und Mesnagerschen Theorie kennen zu lernen, sind in Abb. 4 die Spannungsbilder für das Verhältnis $\alpha = 1$ zahlenmäßig dargestellt worden. Dieses Verhältnis ist charakteristisch für

Großraumbunker, deren Zellen meist ungefähr kubisch sind. — Im einzelnen bedeuten die Kurven

$$s_x(\xi, +1) = -s_x'(\xi, -1) \quad \ldots \quad (1), \qquad -s_x(\xi, -1) = s_x'(\xi, +1) \quad \ldots \quad (2),$$

$$s_x''(\xi, +1) = -s_x''(\xi, -1) \quad \ldots \quad (3),$$

$$s_x(\xi, +1) = -s_x(\xi, -1) = s_x'(\xi, +1) = -s_x'(\xi, -1) = s_x''(\xi, +1) = -s_x''(\xi, 1) \quad (4),$$

nach Navier, Gl. (2a, 2),

$$s_x(\xi, +1) = -s_x(\xi, -1) = s_x'(\xi, +1) = -s_z'(\xi, -1) = s_x''(\xi, +1) = -s_x''(\xi, -1) \quad (5),$$

nach Mesnager, Gl. (1, 3),

$$s_x(\xi, 0) = -s_x'(\xi, 0) \quad \ldots \quad (6), \qquad t(\xi, 0) = t'(\xi, 0) = t''(\xi, 0) \quad \ldots \quad (7),$$

$$t(\xi, 0) = t'(\xi, 0) = t''(\xi, 0) \quad \ldots \quad (8),$$

nach Navier und Mesnager, Gl. (2b, 2),

$$s_y(\xi, 0) = -s_y'(\xi, 0) \quad \ldots \quad (9), \qquad s_x(0, \eta) = -s_x'(0, -\eta) \quad \ldots \quad (10),$$

$$s_x''(0, \eta) = -s_x''(0, -\eta) \quad \ldots \quad (11),$$

$$s_x(0, \eta) = -s_x(0, -\eta) = s_x'(0, \eta) = -s_x'(0, -\eta) = s_x''(0, \eta) = -s_x''(0, -\eta) \quad (12),$$

nach Navier, Gl. (2a, 2),

$$s_x(0, \eta) = -s_x(0, -\eta) = s_x'(0, \eta) = -s_y'(0, -\eta) = s_x''(0, \eta) = -s_x''(0, -\eta) \quad (13),$$

nach Mesnager, Gl. (1, 3),

$$s_y(0, \eta) = -s_y'(0, -\eta) \quad \ldots \quad (14), \qquad s_y''(0, \eta) = -s_y''(0, -\eta) \quad \ldots \quad (15),$$

$s_y(0, \eta) = -s_y'(0, -\eta) \quad \ldots \quad (16)$, nach Navier und Mesnager, Gl. (2c, 2),

$s_y''(0, \eta) = -s_y''(0, -\eta) \quad \ldots \quad (17)$, desgl.,

$$t(1, \eta) = t'(1, -\eta) \quad \ldots \quad (18), \qquad t''(1, \eta) = t''(1, -\eta) \quad \ldots \quad (19),$$

$$t(1, \eta) = t'(1, \eta) = t''(1, \eta) \quad \ldots \quad (20),$$

nach Navier und Mesnager, Gl. (2b, 2).

Linie (18), nämlich die Schubspannung am Auflager bei Last oben, zeigt gegenüber der parabolischen Verteilung (20) eine starke Konzentration nach oben hin, also nach der Belastung zu. Diese schon in 4 vorausgesagte Erscheinung läßt sich qualitativ in anschaulicher Weise erklären: Man denke sich die Scheibe durch eine Anzahl von Schnitten $\eta =$ konst. in eine Reihe übereinander liegender Balken zerlegt. Die Mittellinien dieser Balken werden nun in Feldmitte infolge der von oben her eingetragenen Druckspannungen sich einander nähern, über den Auflagern dagegen nach den Ausführungen in 4 ihre Höhenlage beibehalten. Die Biegungspfeile der einzelnen Schichtbalken werden somit von oben nach unten abnehmen; die zum größeren Biegungspfeil gehörige größere Krümmung verursacht aber in den oberen Schichten eine größere Querkraft, womit die Form von (18) durch einfache, aus der üblichen Biegungslehre entnommene Vorstellungen erklärt ist.

Der Irrtum der Mesnagerschen Theorie liegt eben darin, daß sie auf diese, aus der Art der Lasteintragung an der Ober- oder Unterseite des Balkens entstehenden Unterschiede in der Verformung überhaupt nicht eingeht und infolgedessen auch deren Einfluß auf die Verteilung der Schubspannungen nicht erkennt.

Bei den Biegungsspannungen (10) tritt ebenfalls eine Konzentration nach dem belasteten Rande hin ein. Der Spannungsnullpunkt liegt nicht in der Mitte, sondern fast am oberen Drittel. Diese Konzentration läßt sich, ebenso wie diejenige von (18), durch das St. Venantsche Prinzip erklären: die längs des Randes $\eta = +1$ verteilten $p(x)$ bilden eine Gleichgewichtsgruppe; der Kraftschluß vollzieht sich daher in der Nähe des Lastangriffs, so daß die weiter abgelegenen Zonen nur geringe Spannungen erhalten. Bei sehr gedrungenen Balken konvergiert die Biegungsspannung $s_x(\xi, -1)$ sogar rasch gegen Null, siehe Abschnitt 8.

Die Verteilung der Randbiegungsspannungen längs ξ, wie aus (1) und (3) ersichtlich, ist nicht parabolisch, trotzdem natürlich das Biegungsmoment aus rein statischen Gründen unabhängig vom Schlankheitsgrad einer Parabel folgt. Es hat dies seinen Grund darin, daß die Diagramme in verschiedenen Schnitten $\eta =$ konst. nicht untereinander ähnlich sind, so daß der Spannungsverlauf in Schnitten $\eta =$ konst., nicht dem Moment proportional ist. Der ungefähre Zusammenfall von $s_x(\eta, -1)$ mit der Navierschen Parabel ist rein zufällig und nur für $\alpha = 1$ gültig; siehe auch den Schnitt der Linien (3) und (5) in Abschnitt 8.

Zu beachten ist übrigens, daß die maßgebenden Schubspannungen kleiner, die maßgebenden Biegungsspannungen größer sind als die übliche Biegungslehre erwarten läßt. Dies zeigt sich bei noch gedrungeneren Balken noch ausgeprägter. Die Erscheinung, daß bei gedrungenen Formen die Biegungsspannungen rasch an Wichtigkeit gegenüber den Schubspannungen zurücktreten, erfährt hierdurch eine Abschwächung.

Bemerkenswert ist weiterhin, daß für oben und unten angreifende Belastung die $t''(1, \eta)$ zwar symmetrisch werden, aber nicht etwa in die Parabel (20) übergehen, sondern nach (19) ziemlich gleichmäßig über die Trägerhöhe verteilt sind, so daß der Größtwert von (19) kaum mehr als $^2/_3$ desjenigen von (20) beträgt. Umgekehrt lehrt der Vergleich von (11) mit (12), daß die Biegungsspannungen auch hier größer werden als nach der Elementartheorie.

Mit der Konzentration der Schubspannungen (18) nach dem oberen Rande ist natürlich eine raschere Abnahme der s_y verbunden. Wenn trotzdem für ($\alpha = 1$!) die genaue Verteilung (14) von $s_y(0, \eta)$ in Feldmitte kaum von derjenigen (16) zu unterscheiden ist, so liegt dies daran, daß diese raschere Fortleitung der Belastung vornehmlich in den Partien nahe den Auflagerquerschnitten erfolgt: die Linie (9) für $s_y(\xi, 0)$ läuft nach $\xi = 1$ etwa parabolisch auf Null aus, während sie nach (2c, 2) in gleichbleibender Intensität bis zum Auflager geht.

8. Abhängigkeit der Spannungen vom Schlankheitsgrad.

8. Abhängigkeit der Spannungen vom Schlankheitsgrad. In Abb. 5 sind einige wichtige Spannungen in ihrer Abhängigkeit vom Schlankheitsverhältnis aufgetragen. Für $\alpha = \infty$ gehen die Formeln des Abschnitts 6 in die bekannten Werte für die unendliche Halbscheibe über; als wesentliches Ergebnis, das sich auch aus (1a, 6) ersehen läßt, ist hervorzuheben, daß am belasteten Rande $s_x(\xi, 1) = p$ ist. Die Biegungsspannung kann also dort bei noch so hohem Balken nie kleiner als p werden.

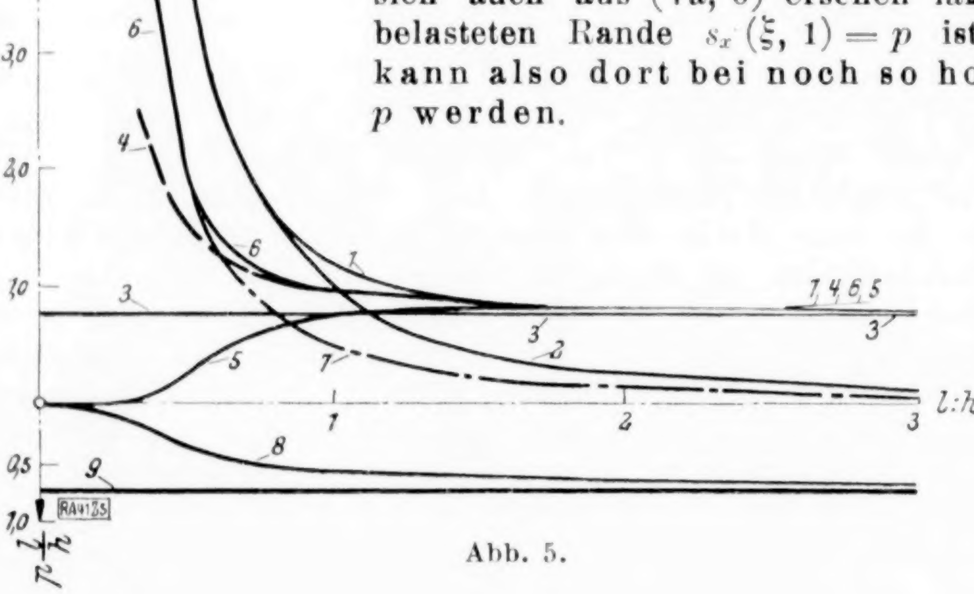


Abb. 5.

Läßt man dies auch für von ∞ abweichende Schlankheitsgrade gelten, so wird man für stark gedrungene Balken nur um ein Weniges zu geringe Spannungen erhalten; die Beiwerte von $p\,l^2/h^2$ werden dann einer Hyperbel folgen; ähnliches gilt bei hälftig an der Ober- und Unterseite angreifender Last.

Im einzelnen bedeuten

$s_x(0,1) = -s_x'(0,-1)$ . . . (1), $s_x(\xi,1) = -s_x'(\xi,-1) = -p$ (Hyperbel) (2),

$s_x(0,1) = -s_x(0,-1) = s_x'(0,1) = -s_x'(0,-1) = s_x''(0,1) = -s_x''(0,-1)$ nach Navier (3),

$s_x(0,1) = -s_x(0,-1) = s_x'(0,1) = -s_x'(0,-1) = s_x''(0,1) = -s_x''(0,-1)$ nach Mesnager, (1, 3) (4),

$s_x(0,-1) = -s_x'(0,1)$ . . . . (5), $s_x''(0,1) = -s_x''(0,-1)$ . . . . (6),

$s_x''(0,1) = -s_x''(0,-1) = -{}^1/_2\,p$ (Hyperbel) (7), $t(1,0) = t'(1,0) = t''(1,0)$ . . (8),

$t(1,0) = t'(1,0) = t''(1,0)$ nach Navier und Mesnager, (2b, 2) . . (9).

Der Vergleich von (1) mit (2) und von (6) mit (7) lehrt, daß für $\alpha > 2$ die Biegungsspannungen am belasteten Rande ohne merkbaren Fehler einfach gleich p gesetzt werden können. Die s_x am unbelasteten Rande nehmen mit steigendem α schnell ab und können für $\alpha > 3$ unbedenklich Null gesetzt werden.

Man sieht weiterhin, daß für diese stark gedrungenen Balken die Berechnung nach Navier, (3), überhaupt jeden Sinn verliert und daß auch die Rechnung nach Mesnager, (4), die s_x in Feldmitte zwar wesentlich besser als die Naviersche Theorie, aber immer noch viel zu klein liefert.

Auch die Schubspannungen in halber Höhe der Auflagerlinie nehmen mit wachsendem α rasch, wenn auch nicht so rasch wie die Biegungsspannungen des unbelasteten Randes, ab. Allerdings ist $t(1, 0)$ nicht der Größtwert der $t(1, \eta)$; dieser liegt vielmehr näher an der belasteten Seite und ist im allgemeinen größer, jedenfalls aber nach (2 c, 6) nie kleiner als $\frac{2p}{\pi}$.

Bei $\alpha = 1/2$ beträgt die Abweichung der strengen Lösung gegenüber Navier für die Biegungsspannung im belasteten Rande + 8 vH, im unbelasteten Rande + 6 vH, für s_x'' + 7 vH, sowie die Schubspannung — 12 vH. Bei nicht zu hoch geschraubten Genauigkeitsansprüchen, wie sie besonders bei Berechnung von Eisenbetonbauten angemessen sind, kann man also für $h : l < 1 : 2$, ohne den Tatsachen Gewalt anzutun, nach Navier rechnen. Da andererseits für $\alpha > 2$ die überaus einfachen Ergebnisse der Theorie der unendlichen Halbscheibe gelten, dürfte der Bereich, in dem die vorstehende Theorie angewandt werden muß, etwa mit $2 > a > 1/2$ zu umgrenzen sein.

9. Die Naviersche Theorie als Grenzfall der neuen Lösung. Wenn auch im vorigen Abschnitt gezeigt wurde, daß die Spannungswerte der strengen Theorie mit wachsender Schlankheit schnell nach denen von Navier konvergieren, so ist es doch von theoretischem Interesse, diesen Uebergang auch in mathematisch-formaler Hinsicht wenigstens für einige der wichtigeren Werte zu vollziehen.

Durch Entwicklung des Bruches in (1, 6) in eine Mac Laurinsche Reihe erhält man nämlich unter Beachtung von $\gamma_n = \frac{n \pi h}{2 l}$

$$s_x(\xi, 1) = -\frac{24}{\pi^3} p \frac{l^2}{h^2} \sum \frac{(-1)_n}{n^3} \cos \xi_n \left(1 + \frac{2}{15} \gamma_n^2 + \frac{208}{1575} \gamma_n^4 - - -\right) \quad . \quad . \quad (1).$$

Nähert sich γ_n der Null, d. h. ist der Balken sehr schlank, so wird hieraus

$$s_x(\xi, 1) = -\frac{24}{\pi^3} p \frac{l^2}{h^2} \sum \frac{(-1)_n}{n^3} \cos \xi_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1\,\text{a}).$$

Dies ist aber nichts anderes als die Fourier-Entwicklung des nach Navier sich ergebenden Spannungswertes

$$s_x(\xi, 1) = -\frac{3\, l^2}{4\, h^2} \left(1 - 4 \frac{x^2}{l^2}\right) p \text{ für } -l/2 < x < +l/2, \text{ usw.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Hierdurch ist nachgewiesen, daß für unendlich dünne Balken die Spannungen (1, F) der strengen Lösung in die Navierschen Werte übergehen.

Aehnliche Untersuchungen sind vom Verf. für andere Stellen, sowie für t und s_y durchgeführt; sie ergaben ebenfalls die schon aus Abb. 5 ersichtliche Konvergenz zur Navierschen Lösung.

10. Offene Fragen. – Konstruktive Nutzanwendung. Zur völligen Beherrschung des Kräftespiels in Konstruktionen der in Abschnitt **1**, gekennzeichneten Art ist die Klärung einer Anzahl weiterer Fragen notwendig; der Spannungsverlauf bei Vollbelastung aller Felder ist inzwischen vom Verfasser behandelt worden. Belastungen, die in Richtung ξ nicht gleichmäßig verteilt sind, können mit den gleichen Mitteln, wie sie in vorliegender Arbeit verwandt wurden, erfaßt werden. Häufig kommen auch Belastungen vor, die über die ganze Höhe der Scheibe verteilt sind. Als derartige Massenkraft läßt sich insbesondere die vom Schüttgut auf die Ebenen $z = \pm b/2$ der Scheibe ausgeübte Reibung auffassen, da sie ohne merkbaren Fehler in die Mittelebene $z = 0$ verlegt werden kann. Verfasser hat inzwischen auch für diese Angriffsweise eine Lösung aufgestellt.

Zur Ueberprüfung des Gültigkeitsbereichs der Voraussetzung $\varepsilon_y = 0$ für die Dehnung am Ende des letzten Feldes (siehe Abschnitt **4**) wird man dort den aus vorstehender Arbeit sich ergebenden Schubspannungen weitere Schubspannungen $t_0(-1, \eta)$ mit der Eigenschaft $\int_{-1}^{+1} t_0(-1, \eta)\, d\eta = 0$ überlagern und deren Verteilung so bestimmen, daß die Dehnungen ε_y im stützenden und gestützten Teil die gleichen sind. Die Gesamtspannungen in der Scheibe ergeben sich dann durch Ueberlagerung der aus t_0 entstehenden über diejenigen vorliegender Arbeit; jedoch ist zu hoffen, daß die sich herausstellenden Abweichungen in vielen Fällen so klein sein werden, daß ihre Berücksichtigung überflüssig wird.

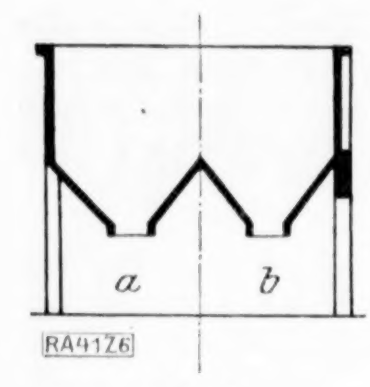


Abb. 6.

Die Nutzanwendung der Ergebnisse dieser Arbeit ist ausführlich in »Beton und Eisen« 1929, Heft 13 und 14 besprochen; als Merkmal für die praktische Tragweite sei hier nur erwähnt, daß die Verschwendung infolge Anordnung überflüssiger Balken nach Abb. 1 b manchmal sechsstellige Zahlen erreicht. Es lohnt sich also durchaus, der Theorie der Scheiben weiter nachzugehen; ihr Anwendungsbereich ist ebenso groß und die aus ihr entspringenden wirtschaftlichen Vorteile mindestens so bedeutend wie die der Plattentheorie.

Bei gebrochenen Querschnitten nach Abb. 6 folgt das Kräftespiel daraus, daß (1) die Bewegungen senkrecht zur Wandfläche in den Graten verschwindend sind gegenüber denjenigen zwischen denselben und (2) die Dehnungen ε_x zweier in einem Grat zusammenstoßender Scheiben dort die gleichen sind. Derartige Systeme, die der Verfasser der Kürze halber Faltwerke nennt, wirken wie ein Hohlbalken von ungeheurem Querschnitt. Selbstverständlich können sie aber nicht etwa nach Navier unter Heranziehung des Linienträgheitsmoments berechnet werden. Vielmehr führen die vom Verfasser für den Fall, daß die einzelnen Wandteile keine allzu gedrungenen Rechtecke sind, entwickelten Verfahren[1]) auf Gleichungen Clapeyronscher Art zwischen den Dehnungen ε_y bzw. den Schubspannungen an den Kanten; der Verlauf der Biegungsspannungen ist nur von Kante zu Kante geradlinig. Die vielseitige Anwendbarkeit auch dieser Bauformen im Bunker- und Hallenbau, sowie zu Turmbauten, ist ebenfalls in der genannten Quelle beschrieben. 41

Über die Spannungen im Mittelschnitt eines Eisenbahnzughakens.

Von **P. FILLUNGER** in Wien.

Die übliche Berechnung von Zughaken beruht auf der Annahme, daß die Querschnitte bei der elastischen Formänderung ebene Flächen bleiben und wird mittels einer nichtexakten, einfachen Biegeformel bewerkstelligt. Diese Grashof-Bachsche Formel für Stäbe mit starker Krümmung kann bei Eisenbahnzughaken nicht angewendet werden. Wie die Abb. 1 und 2 zeigen, sind die Begriffe »Stabachse«, »Krümmungsmittelpunkt« und »Querschnitt«, über die vollständige Klarheit herrschen muß, wenn die betreffenden Maßzahlen in die Biegeformel eingesetzt werden sollen, in unserem Falle durchaus nicht eindeutig. Legt man in der Umgebung der Mittelschnitte $A-B$ gefühlsmäßig ebene Querschnittsflächen, um den Krümmungsmittelpunkt im Mittelschnitt zu bestimmen, so fällt dieser Punkt bei Abb. 2 sogar ins Innere des Hakens!

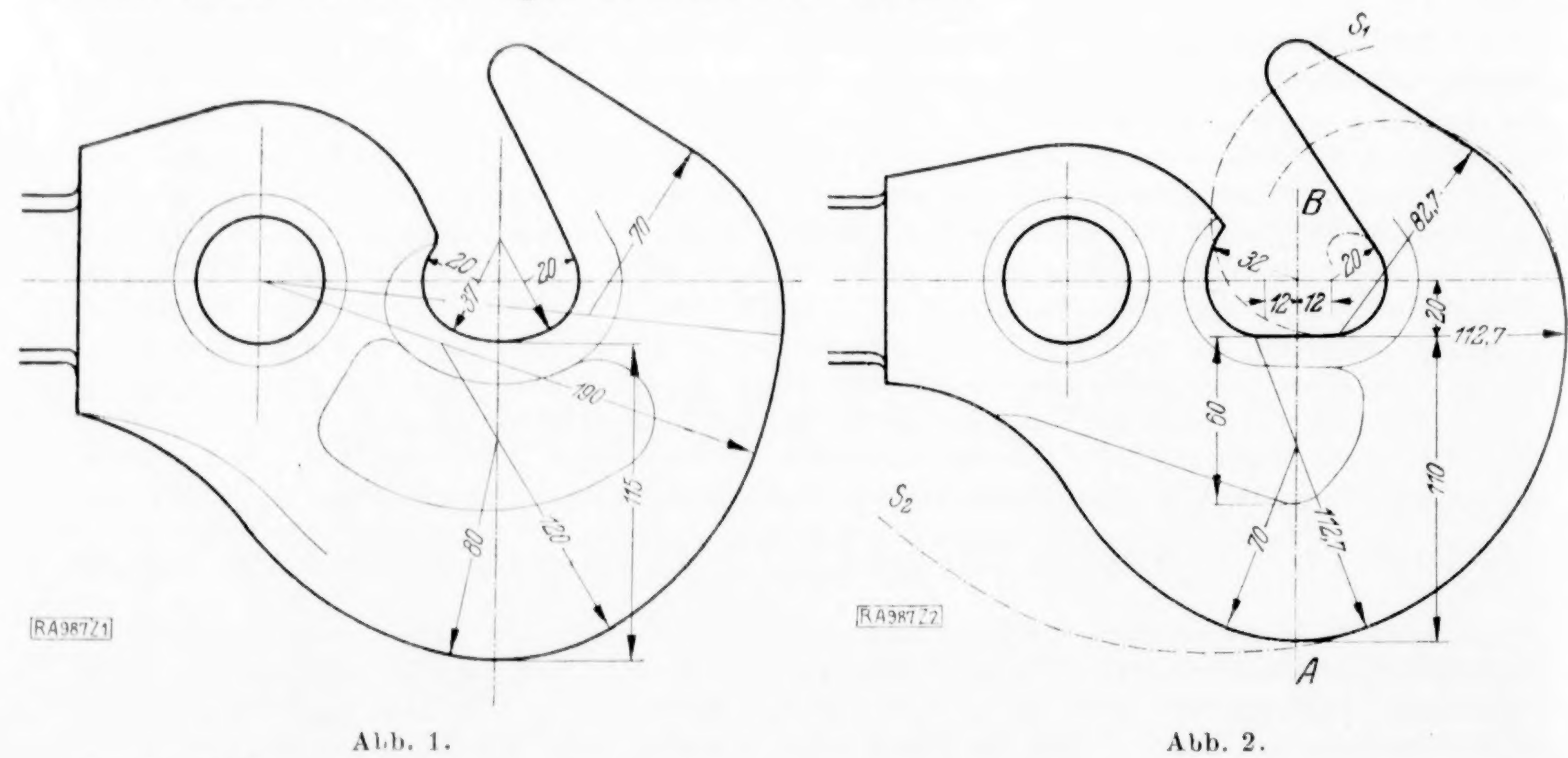


Abb. 1. Abb. 2.

[1]) Craemer, Allgemeine Theorie der Faltwerke, Beton und Eisen 1930.

Man kann sich einen Teil der Haken durch eine Platte ersetzt denken, deren Rand nach kongruenten logarithmischen Spiralen S_1 und S_2 (Abb. 2) gekrümmt ist. Es gelingt, mit Hilfe der Airyschen Spannungsfunktion die Spannungen in einem solchen hakenähnlichen Gebilde zu berechnen, wenn bei festgehaltenem unendlich fernem Querschnitt im Ursprung eine Einzelkraft und ein Moment als Belastung auftreten [1]). In der Umgebung des Mittelschnittes muß jedoch ein andrer Ersatzkörper gewählt werden. Da ein Kreiszweieck durch die Transformation $x + i y = (x' + i y')^{-1}$ auf einen Winkelraum abgebildet wird und diese Transformation einen spannungsfreien Rand des ebenen Problems in einen Rand mit konstanter Normalspannung überführt, ist es möglich, die Spannungsverteilung in der Umgebung des Mittelschnittes auf die Spannungsverteilung in keilförmigen Körpern zurückzuführen.

Dieser Vorgang wird in den Abschnitten **1** bis **3** gezeigt. Die Rechnungen werden nur für die besonders charakteristische ältere Hakenform (Abb. 2) mit einem Stück geradliniger Begrenzung am oberen Rande durchgeführt. Um die Uebereinstimmung mit der Wirklichkeit zu verbessern, kann man zwar nicht exakt aber doch glaubwürdig noch berücksichtigen, daß der Mittelquerschnitt wie alle anderen Querschnitte vom Rechteck einigermaßen abweicht. Dies wird im **4.** Abschnitt durchgeführt. Andeutungen über weitere Verbesserungen der Hakenberechnung und Vergleiche mit Versuchsergebnissen bilden den Abschluß dieser Untersuchung.

1. Die Grundlösungen für den keilförmigen Körper. Man kann nach Lösungen für das ebene Problem im keilförmigen Körper (Abb. 3) fragen, für welche die Airysche Spannungsfunktion die Form

$$F = \varrho^n f(\varphi)$$

annimmt. Setzt man F in die Bedingungsgleichung

$$\Delta \Delta F = 0$$

ein, so entsteht eine gewöhnliche Differentialgleichung 4. Ordnung mit konstanten Koeffizienten für $f(\varphi)$, so daß F vollständig bestimmt werden kann. Andererseits kann unmittelbar gezeigt werden [2]), daß der Spannungstensor für bestimmte einfache Belastungen proportional mit ϱ^{n-2} ist.

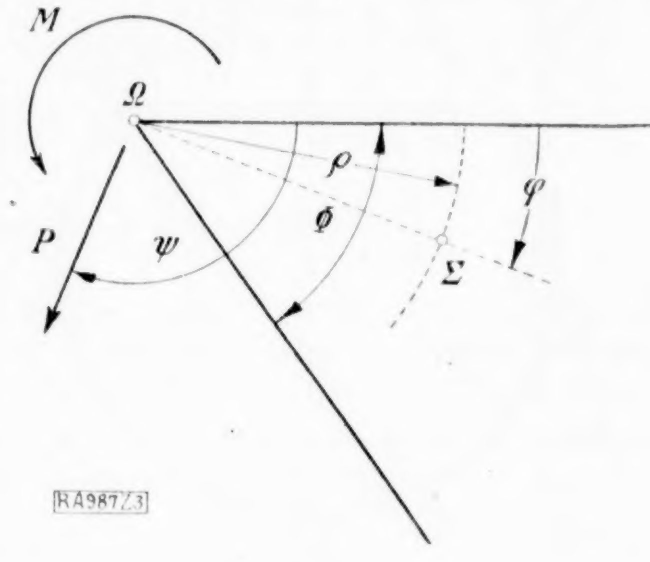


Abb. 3.

Greift z. B. ein Moment M in der Keilschneide $\varrho = 0$ an, so nehmen alle Spannungen mit ϱ^{-2} ab. Daher ist $n = 0$, und

$$F = C_1\, 2\, \varphi + C_1' \sin 2\varphi + C_1'' \cos 2\varphi.$$

Für spannungsfreie Ränder $\varphi = 0$ und $\varphi = \Phi$ nimmt die Airysche Funktion die Form an

$$F = C_1 (2\varphi - \sin 2\varphi + \operatorname{tg} \Phi \cos 2\varphi), \qquad C_1 = \frac{M}{2(\Phi - \operatorname{tg} \Phi)} \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Die Spannungen sind dann

$$\sigma_r = \frac{4 C_1}{\varrho^2} (\sin 2\varphi - \operatorname{tg} \Phi \cos 2\varphi), \qquad \sigma_t = 0, \qquad \tau = \frac{2 C_1}{\varrho^2} (1 - \cos 2\varphi - \operatorname{tg} \Phi \sin 2\varphi),$$

und die radiale und tangentiale Verschiebung sind

$$u = -\frac{4 C_1}{E \varrho} (\sin 2\varphi - \operatorname{tg} \Phi \cos 2\varphi),$$

$$v = -\frac{4 C_1}{E \varrho} \cdot \frac{m-1}{2m} \left(\frac{m+1}{m-1} + \cos 2\varphi + \operatorname{tg} \Phi \sin 2\varphi\right).$$

---

[1]) Fillunger: Ein Beitrag zur Theorie der Festigkeit von Zughaken. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 61. Bd., 1912, Heft 1/2, S. 92.

Fillunger: Ein Beitrag zur Lösung des Hakenproblems. (Auf Grund einer Bemerkung von K. Wieghardt.) Sitzungsber. d Akad. der Wissensch. in Wien, math.-naturw. Klasse, 134 Bd., 1. u. 2. Heft, 1915.

[2]) Fillunger, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 59. Bd., 1911, Heft 1, S. 44 und 60. Bd., 1912, Heft 3, S. 275

Im Unendlichen verschwinden die Spannungen wie ϱ^{-2}, die Verschiebungen wie ϱ^{-1}. In der Symmetrieebene $\varphi = \Phi/2$ ist u stets Null. Wird $\Phi = \operatorname{tg} \Phi$ ($257^\circ\, 15'\, 29''$), so sind alle Spannungen und Verschiebungen für jedes M unendlich groß. Dieses Verhalten erinnert an die sog. Ausnahmefachwerke. Nähert sich Φ dem kritischen Wert, so verlieren die üblichen Gleichungen der Elastizitätslehre ihre Giltigkeit, weil sie unter der Voraussetzung kleiner Formänderungen abgeleitet sind.

Eine in der Schneide angreifende Einzelkraft P führt zu $n = 1$ und

$$\left.\begin{aligned} F &= \varrho\,(C_2\, \varphi \sin \varphi + C_3\, \varphi \cos \varphi), \\ C_2 &= P\, \frac{\sin \psi \sin^2 \Phi - \cos \psi\, (\Phi - \sin \Phi \cos \Phi)}{\Phi^2 - \sin^2 \Phi}, \\ C_3 &= P\, \frac{\sin \psi\, (\Phi + \sin \Phi \cos \Phi) - \cos \psi \sin^2 \Phi}{\Phi^2 - \sin^2 \Phi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Die Spannungen sind hier

$$\sigma_r = 2/\varrho\,(C_2 \cos \varphi - C_3 \sin \varphi), \qquad \sigma_t = \tau = 0,$$

verschwinden also im Unendlichen wie ϱ^{-1}. Dieser Spannungszustand wird nach Michell[1]) einfache radiale Verteilung genannt.

Eine gleichmäßig verteilte Belastung der Ränder $\varphi = 0$ und $\varphi = \Phi$ und eine linear ansteigende Belastung führen zu $n = 2$ bzw. $n = 3$ und finden bei der Berechnung von Talsperren praktische Verwendung. Sie wurden von M. Lévy[2]), allerdings unter Benutzung von geradlinigen Koordinaten x, y zuerst behandelt. Für $n > 3$ hat sich bisher keine Anwendung gefunden. Je größer n ist, desto geringer ist der praktische Wert der betreffenden Lösung, weil die Spannungen und Verschiebungen im Unendlichen über alle Grenzen wachsen. Die Verwendbarkeit der betreffenden Lösung im Endlichen ist dann sehr abhängig von den Verhältnissen im festgehaltenen Querschnitt.

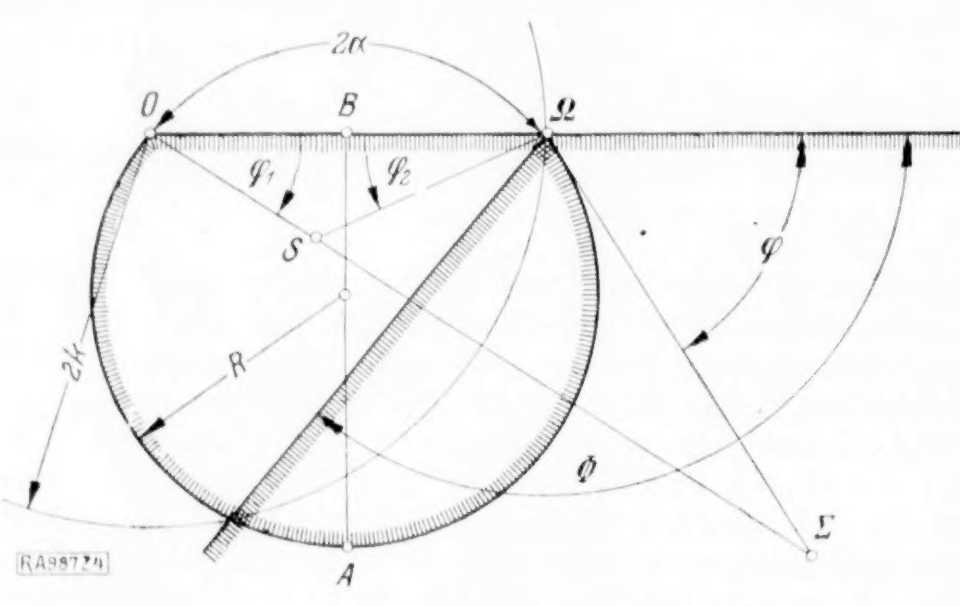


Abb. 4.

2. Inversion der Grundgleichungen.

Ist O das Inversionszentrum (Abb. 4) und $2\,k$ der Halbmesser des Inversionskreises, so geht ein Punkt Σ, dessen geradlinige Koordinaten in bezug auf den Ursprung Ω, ξ und η und dessen Polarkoordinaten ϱ und φ sind, durch die Transformation

$$\xi + 2\,k = \varrho \cos \varphi + 2\,k = 4\,k^2\, x/r^2, \qquad \eta = \varrho \sin \varphi = 4\,k^2\, y/r^2 \quad . \; . \; . \quad (3)$$

in einen Punkt S über, dessen geradlinige Koordinaten in bezug auf das Inversionszentrum O mit x und y bezeichnet sind. Es empfiehlt sich, Bipolarkoordinaten

$$\overline{O\,S} = r_1\,(= r), \qquad \overline{\Omega\, S} = r_2, \qquad \measuredangle\, \Omega\, O\, S = \varphi_1, \qquad \measuredangle\, O\, \Omega\, S = \varphi_2$$

einzuführen. Diese Transformation bildet das Innere des Winkelraumes Φ mit dem Scheitel Ω auf das Innere eines Kreiszweieckes ab, dessen Ecken in O und Ω liegen. $\Omega\, O$ ist die Abbildung des Halbstrahles $\varphi = 0$, ein Kreisbogen mit dem Zentriwinkel $(2\,\pi - 2\,\alpha)$ und dem Halbmesser $R = k/\sin \alpha$ die Abbildung des Halbstuhles $\varphi = \Phi$. Es bestehen ferner die Beziehungen

$$\Phi = \pi - \alpha, \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad x = r_1 \cos \varphi_1 = 2\,k - r_2 \cos \varphi_2, \quad y = r_1 \sin \varphi_1 = r_2 \sin \varphi_2 .$$

Eine Bewegung von Ω nach links wird abgebildet als eine Bewegung von Ω nach rechts, eine Drehung um Ω entgegen dem Uhrzeiger in eine Drehung um Ω im Uhrzeigersinn.

[1]) Michell, London Math. Soc. Proc. vol. 34, (1902), p. 134.

[2]) M. Lévy, Comptes rendus, 1898, 2. mai; Comptes rendus, 1898, 4. juillet.

Ist endlich F **eine Spannungsfunktion im Punkte** Σ, **für welche die Ränder** $\varphi = 0$ und $\varphi = \Phi$ **des Winkelraumes spannungsfrei sind, so ist bekanntlich**[1])

$$r^2 F = r_1^2 F$$

eine Spannungsfunktion im transformierten Punkt S, wobei die Belastung längs aller stetig gekrümmten Randlinien der Abbildung nur in gleichmäßig verteilter Normalspannung besteht und Singularitäten des ursprünglichen Körpers in Singularitäten der Abbildung übergeführt werden.

Wir transformieren zunächst die Airysche Funktion für eine Einzelkraft P. Nach Gl. (2) und (3) lautet die transformierte Spannungsfunktion in S[2])

$$\begin{aligned} F &= r_1^2 (C_2 \varphi \varrho \sin \varphi + C_3 \varphi \varrho \cos \varphi) = r_1^2 (C_2 \varphi \eta + C_3 \varphi \xi) \\ &= 4 k^2 \left[C_2 \varphi y + C_3 \varphi \left(x - \frac{r_1^2}{2k} \right) \right] \\ &= 4 k^2 (\varphi_1 + \varphi_2) \left[C_2 r_1 \sin \varphi_1 + C_3 \frac{r_1 r_2}{2k} \cos (\varphi_1 + \varphi_2) \right] \quad \ldots \ldots \quad (4). \end{aligned}$$

Sodann ergeben sich die Spannungen wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \sigma_x &= 4 k^2 C_2 \left[2 \left(\frac{\cos \varphi_1}{r_1} + \frac{\cos \varphi_2}{r_2} \right) - r_1 \sin \varphi_1 \left(\frac{\sin 2 \varphi_1}{r_1^2} + \frac{\sin 2 \varphi_2}{r_2^2} \right) \right] \\ &+ 2 k C_3 \left[\sin 2 (\varphi_1 + \varphi_2) - 2 r_1 r_2 \left(\frac{\cos \varphi_1}{r_1} + \frac{\cos \varphi_2}{r_2} \right)^2 \sin (\varphi_1 + \varphi_2) - 2 (\varphi_1 + \varphi_2) \right] \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \sigma_y &= 4 k^2 C_2 r_1 \sin \varphi_1 \left(\frac{\sin 2 \varphi_1}{r_1^2} + \frac{\sin 2 \varphi_2}{r_2^2} \right) \\ &+ 2 k C_3 \left[\sin 2 (\varphi_1 + \varphi_2) - 2 r_1 r_2 \left(- \frac{\sin \varphi_1}{r_1} + \frac{\sin \varphi_2}{r_2} \right)^2 \sin (\varphi_1 + \varphi_2) - 2 (\varphi_1 + \varphi_2) \right] \\ - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \tau &= 4 k^2 C_2 \left[\frac{\sin \varphi_1}{r_1} - \frac{\sin \varphi_2}{r_2} + r_1 \sin \varphi_1 \left(\frac{\cos 2 \varphi_1}{r_1^2} - \frac{\cos 2 \varphi_2}{r_2^2} \right) \right] \\ &+ 2 k C_3 \sin (\varphi_1 + \varphi_2) \left[- \frac{r_2}{r_1} \sin 2 \varphi_1 + \frac{r_1}{r_2} \sin 2 \varphi_2 - 2 \sin (\varphi_1 - \varphi_2) \right] \end{aligned}\right\} \quad (5).$$

Aus diesen Gl. (5) folgt zunächst, daß die Spannungen sowohl in O $(r_1 = 0)$ als auch in Ω $(r_2 = 0)$ unendlich groß werden wie r^{-1}. Daher greifen in diesen Punkten Einzelkräfte an. Da wir nur die Spannungen im Mittelschnitt $r_1 \cos \varphi_1 = r_2 \cos \varphi_2 = k$ benötigen, bilden wir die dort herrschenden Spannungen $\overline{\sigma_x}$, $\overline{\sigma_y}$, $\overline{\tau}$ und schreiben kürzehalber $r_1 = r_2 = r$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$. Es ist dann nach einigen Umformungen

$$\left.\begin{aligned} \overline{\sigma_x} &= 16 k C_2 \cos^4 \varphi - 8 k C_3 (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi + 2 \sin \varphi \cos^3 \varphi) \\ \overline{\sigma_y} &= 16 k C_3 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - 8 k C_3 (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi - 2 \sin \varphi \cos^3 \varphi) \\ \overline{\tau} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (6).$$

Wir betrachten zunächst den besonderen Fall, daß die Kraft P im Keil unter einem Winkel $\psi = \pi$ wirkt (Abb. 3). Nach einer oben gemachten Bemerkung muß er zu der in Abb. 5 dargestellten Belastung durch zwei Kräfte Q führen. Man erkennt nämlich schon nach Gl. (5), daß in der geradlinigen Begrenzung des Kreiszweieckes $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ die Spannung σ_y und natürlich auch τ verschwindet. Es folgt dann schon aus Gleichgewichtsgründen, daß auch der krumme Rand O, A, Ω spannungsfrei sein muß. Mit geringer Mühe kann man sich aber auch überzeugen, daß $\overline{\sigma_y}$ nach Gl. (6) im tiefsten Punkt A verschwindet, wenn man (siehe Gl. 2)

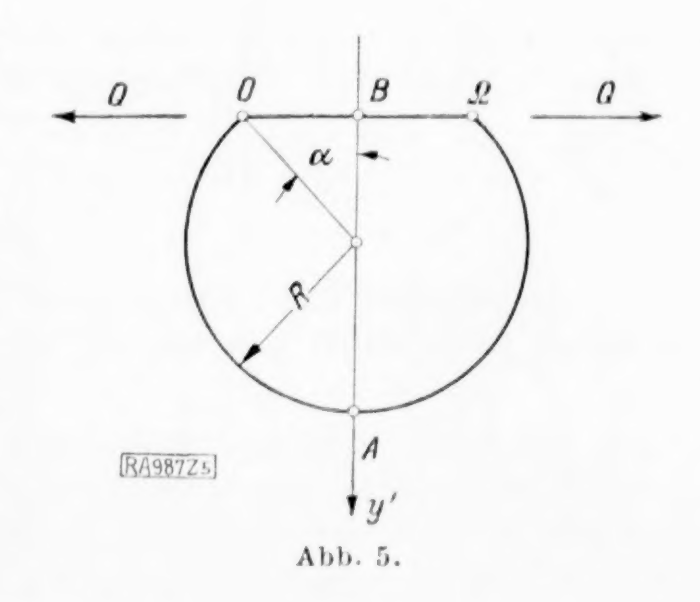


Abb. 5.

[1]) Love-Timpe, Lehrbuch der Elastizität, S. 255 u. ff.

[2]) Vergl. A. Timpe, Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen, einfach gelöst mit Hilfe der Airyschen Funktion. Zeitschr. f. Math. u. Phys., 52. Bd., 1905, S. 378.

$$\left.\begin{aligned} C_2 &= P\,\frac{\Phi - \sin\Phi\cos\Phi}{\Phi^2 - \sin^2\Phi} = P\,\frac{\pi - \alpha + \sin\alpha\cos\alpha}{(\pi-\alpha)^2 - \sin^2\alpha} \\ C_3 &= P\,\frac{\sin^2\Phi}{\Phi^2 - \sin^2\Phi} = P\,\frac{\sin^2\alpha}{(\pi-\alpha)^2 - \sin^2\alpha} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

und $\varphi = \frac{\pi - \alpha}{2}$ in diese Beziehung einsetzt. Um Q zu bestimmen, bilden wir das Integral

$$\int_B^A \sigma_x\,dy' = \int_0^{\frac{\pi-\alpha}{2}} \sigma_x k \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = 4\,k^2 P = Q,$$

während
$$\int_B^A \sigma_x\,y'\,dy' = \int_0^{\frac{\pi-\alpha}{2}} \sigma_x k^2 \operatorname{tg}\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = 0 \quad \text{wird.}$$

In der Tat erweist sich die Dimension der Spannungen in den Formeln (5) und (6) als kgcm^{-1}, wie es für eine Scheibe von der Dicke 1 sein muß, wenn man in den Gl. (7)

$$P = \frac{Q}{4\,k^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

einführt. Mit den Gl. (5) bzw. (6), (7) und (8) ist die Spannungsermittlung für den in Abb. 5 dargestellten Belastungsfall vollständig gelöst. Abb. 6 zeigt die Verteilung der Spannungen σ_x und σ_y im Mittelschnitt $A - B$ für $Q = 1$.

Wird anderseits in Gl. (2) $\psi = \pi/2$ genommen, so wirkt die Kraft im Keil nach abwärts und auch die Kräfte Q', die im Kreiszweieck infolge der Singularitäten in den Ecken auftreten müssen, werden nach abwärts gerichtete Kräfte sein müssen. Man schließt dies aus dem Umstande, daß der Inversionskreis durch die Transformation (3) in sich selbst übergeht. — An die Stelle von (7) tritt nunmehr

$$\left.\begin{aligned} C_2 &= P\,\frac{\sin^2\Phi}{\Phi^2 - \sin^2\Phi} = P\,\frac{\sin^2\alpha}{(\pi-\alpha)^2 - \sin^2\alpha} \\ C_3 &= P\,\frac{\Phi + \sin\Phi\cos\Phi}{\Phi^2 - \sin^2\Phi} = P\,\frac{\pi - \alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{(\pi-\alpha)^2 - \sin^2\alpha} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (9).$$

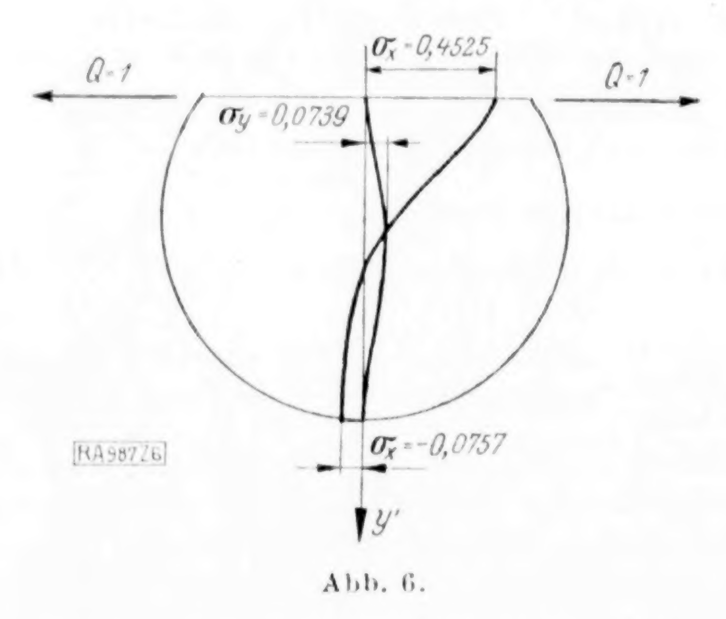


Abb. 6.

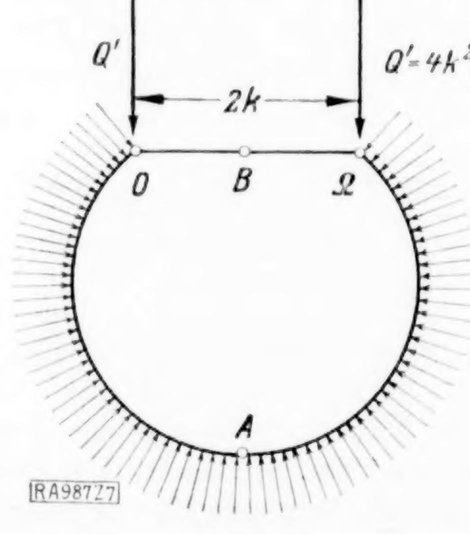


Abb. 7.

Am geraden Rand $O\,B\,\Omega$ (Abb. 7) ist σ_y und τ natürlich wieder gleich Null, am krummen Rand ergibt sich aus (6) und (9), wie im tiefsten Punkt A,

$$\overline{\sigma_y} = -\,4\,k\,P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

Die Einzelkräfte sind daher $Q' = 4\,k^2 P$, doch kommt es auf diese zunächst nicht an.

Transformiert man endlich auch die Spannungsfunktion (1) im Punkt Σ (Abb. 4), so ergibt sich im transformierten Punkt S die neue Spannungsfunktion

$$\left.\begin{aligned} F &= r_1^2\,C_1\,(2\varphi - \sin 2\varphi + \operatorname{tg}\Phi\cos 2\varphi) = r_1^2\,C_1\,(2\varphi - \sin 2\varphi - \operatorname{tg}\alpha\cos 2\varphi) \\ &= C_1\,r_1^2\,[2(\varphi_1 + \varphi_2) - \sin 2(\varphi_1 + \varphi_2) - \operatorname{tg}\alpha\cos 2(\varphi_1 + \varphi_2)], \\ C_1 &= \frac{M}{2(\pi - \alpha + \operatorname{tg}\alpha)} \end{aligned}\right\} \quad (11).$$

Hieraus ergeben sich die Spannungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \sigma_x = 4\,C_1 \Big\{ & \varphi_1 + \varphi_2 + \left[\left(\cos\varphi_1 + \frac{r_1}{r_2}\cos\varphi_2\right)^2 - \frac{1}{2}\right]\Big[\sin 2\,(\varphi_1+\varphi_2) \\
& + \operatorname{tg}\alpha\cos 2\,(\varphi_1+\varphi_2)\Big] + \Big[\sin\varphi_1\cos\varphi_1 + 2\,\frac{r_1}{r_2}\sin\varphi_1\cos\varphi_2 \\
& - \frac{r_1^2}{r_2^2}\sin\varphi_2\cos\varphi_2\Big]\left[1-\cos 2\,(\varphi_1+\varphi_2) + \operatorname{tg}\alpha\sin 2\,(\varphi_1+\varphi_2)\right]\Big\} \\
\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \sigma_y = 4\,C_1 \Big\{ & \varphi_1 + \varphi_2 + \left[\left(\sin\varphi_1 - \frac{r_1}{r^2}\sin\varphi_2\right)^2 - \frac{1}{2}\right]\Big[\sin 2\,(\varphi_1+\varphi_2) \\
& + \operatorname{tg}\alpha\cos 2\,(\varphi_1+\varphi_2)\Big] + \Big[-\sin\varphi_1\cos\varphi_1 + 2\,\frac{r_1}{r^2}\cos\varphi_1\sin\varphi_2 \\
& + \frac{r_1^2}{r_2^2}\sin\varphi_2\cos\varphi_2\Big]\left[1-\cos 2\,(\varphi_1+\varphi_2) + \operatorname{tg}\alpha\sin 2\,(\varphi_1+\varphi_2)\right]\Big\} \\
-\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = \tau = -2\,C_1 \Big\{ & \Big[\cos 2\,\varphi_1 + 2\,\frac{r_1}{r_2}\cos(\varphi_1-\varphi_2) \\
& + \frac{r_1^2}{r_2^2}\cos 2\,\varphi_2\Big]\left[1-\cos 2\,(\varphi_1+\varphi_2) + \operatorname{tg}\alpha\sin 2\,(\varphi_1+\varphi_2)\right] \\
& + 2\left(-\sin\varphi_1 + \frac{r_1}{r_2}\sin\varphi_2\right)\left(\cos\varphi_1 + \frac{r_1}{r_2}\cos\varphi_2\right)\Big[\sin 2\,(\varphi_1+\varphi_2) \\
& + \operatorname{tg}\alpha\cos 2\,(\varphi_1+\varphi_2)\Big]\Big\}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (12).$$

Aus diesen Formeln für die Spannungen ergibt sich:

Die Spannungen werden im Eckpunkt $\Omega\,(r_2 = 0)$ unendlich wie r^{-2}. Daher greift in diesem Punkte ein Moment an, und zwar ein im Uhrzeigersinn drehendes. Im Eckpunkt O $(r_1 = 0)$ sind die Spannungen endlich und nur von φ_1 abhängig. Dort greift also keine konzentrierte Belastung an. Die Spannungen verhalten sich dort vielmehr wie in einem durch gleichmäßig verteilte Normaldrücke belasteten Keil. Das Kreiszweieck steht also unter einer unsymmetrischen Belastung. Daher verschwinden auch die Schubspannungen im Mittelschnitt $A-B$ nicht, wohl aber auf der geradlinigen Begrenzung $O\Omega$. Ferner wird

$$\left.\begin{aligned}
&\text{für } \varphi_1 = \varphi_2 = 0 \ldots \sigma_y = -2\,C_1\operatorname{tg}\alpha \\
&\text{und im tiefsten Punkt } A \\
&\text{für } r_1 = r_2,\ \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi-\alpha}{2} \ldots \sigma_y = 4\,C_1\,(\pi - \alpha + {}^1\!/_2\operatorname{tg}\alpha)
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (13).$$

Man kann daraus auf die in Abb. 8 dargestellte Belastung des Kreiszweieckes schließen. Die Randbelastung besitzt eine in den Mittelschnitt fallende Resultierende P'. Daher greift in Ω außer einem Moment M' auch noch eine nach aufwärts gerichtete Einzelkraft P' an.

3. Zusammensetzung der Ergebnisse. Die bisher gefundenen Spannungszustände im Kreiszweieck genügen, die Spannungsverteilung im Mittelschnitt $A-B$ eines Hakens zu berechnen, zunächst für eine rechteckige Querschnittsfläche. Für Einzelkräfte Q nach Abb. 5 ist die Aufgabe bereits gelöst und in Abb. 6 zeichnerisch dargestellt worden. Die Spannungsverteilung für den Fall, daß zwei Momente N in O bzw. Ω angreifen, erhalten wir durch Ueberlagerungen.

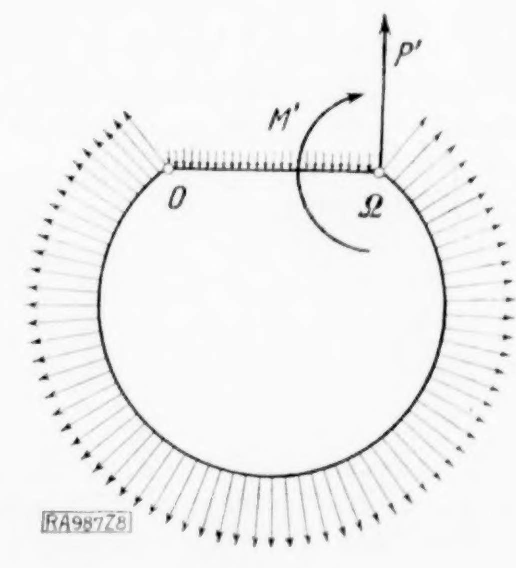


Abb. 8.

Zunächst ergänzen wir die unsymmetrische Belastung, Abb. 8, zu einer symmetrischen, indem wir in der Spannungsfunktion Gl. (11) r_1 mit r_2 vertauschen und zur Spannungsfunktion Gl. (11) hinzufügen. Die neuen Spannungsgleichungen gehen aus Gl. (12) hervor, wenn darin r_1 mit r_2, φ_1 mit φ_2 vertauscht, überdies in der Schubspannung das Vorzeichen umgekehrt wird und die so erhaltenen neuen Ausdrücke zu den Ausdrücken in (12) addiert werden. Dieser Spannungszustand entspricht einer Belastung durch zwei

gleich gerichtete Einzelkräfte P' und zwei entgegengesetzt wirkende Momente M' in O und Ω. Ueberdies wirkt am geraden Rand $\overline{O\Omega}$ ein Normaldruck $(-4\,C_1 \operatorname{tg}\alpha)$, am krummen Rand $\overline{OA\Omega}$ ein Normalzug $8\,C_1(\pi-\alpha+{}^1/_2\operatorname{tg}\alpha)$. [Vergl. Gl. (13)].

Fügt man zu dieser Verteilung eine Verteilung nach Abb. 7 und einen hydrostatischen Druck σ_0 hinzu, so kann man die lotrechten Einzelkräfte aufheben und den Rand spannungsfrei machen, wenn [Gl. (10)]

$$\text{am geraden Rand}\quad \sigma_0 - 4\,C_1 \operatorname{tg}\alpha = 0$$
$$\text{am krummen Rand}\quad \sigma_0 - \lambda\,4\,k\,P + 8\,C_1(\pi-\alpha+{}^1/_2\operatorname{tg}\alpha) = 0$$

ist. Es ergibt sich

$$\sigma_0 = 4\,C_1 \operatorname{tg}\alpha, \qquad \lambda = \frac{2\,C_1(\pi-\alpha+\operatorname{tg}\alpha)}{k\,P} = \frac{M}{k\,P}\,.$$

Man hat also zum »symmetrisch gemachten« Spannungszustand (12) den Spannungszustand σ_0 und Spannungszustand (5) hinzuzufügen, wobei für C_2 und C_3 die Ausdrücke in (9) zu verwenden sind, und M/k an Stelle von P zu setzen ist. Führt man das aus und bildet man sodann die Spannungen im Mittelschnitt $A-B$ eines nach Abb. 9 durch zwei Momente N in O und Ω belasteten Kreisbogenzweieckes, so erhält man nach einigen Umformungen als Funktion des Winkels $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$

$$\left.\begin{aligned}\overline{\sigma}_x &= C_1\left[2\varphi + \sin 2\varphi\,(2+3\cos 2\varphi + 2\cos^2 2\varphi) + \operatorname{tg}\alpha\,(-1+3\cos^2 2\varphi\right.\\ &\qquad \left. + 2\cos^3 2\varphi)\right] + C_2\,(1+\cos 2\varphi)^2 - C_3\left[2\varphi + \sin 2\varphi\,(2+\cos 2\varphi)\right]\\ \overline{\sigma}_y &= C_1\left[2\varphi - \sin 2\varphi\,(-2+\cos 2\varphi + 2\cos^2 2\varphi) + \operatorname{tg}\alpha\,(1+2\cos 2\varphi)\sin^2 2\varphi\right]\\ &\qquad + C_2\sin^2 2\varphi - C_3\,(2\varphi - \sin 2\varphi\cos 2\varphi)\\ \overline{\tau} &= 0\end{aligned}\right\}\quad (14).$$

Hier wurde abweichend von der früheren Bedeutung der Konstanten C_1, C_2, C_3 jetzt

$$C_1 = \frac{4\,M}{\pi-\alpha+\operatorname{tg}\alpha}, \qquad C_2 = \frac{4\,M\sin^2\alpha}{(\pi-\alpha)^2-\sin^2\alpha}, \qquad C_3 = \frac{4\,M\,(\pi-\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)}{(\pi-\alpha)^2-\sin^2\alpha}$$

gesetzt. Bildet man überdies die Integrale

$$\int_B^A \overline{\sigma}_x\,d\,y' = \int_0^{\frac{\pi-\alpha}{2}} \overline{\sigma}_x k \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = 0, \qquad -\int_B^A \overline{\sigma}_x y'\,d\,y' = -\int_0^{\frac{\pi-\alpha}{2}} \overline{\sigma}_x k^2 \operatorname{tg}\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = 4\,k^2\,M = N,$$

so überzeugt man sich, daß die $\overline{\sigma}_x$ in der Tat keine Resultierende ergeben, sondern nur ein Moment vom Betrage $4\,k^2 M$. Das Minuszeichen in der Momentengleichung rührt davon her, daß eine Zugspannung am Mittelschnitt zu einem Teilmoment um B führt, welches der Belastung N entgegengesetzt ist. Die drei Konstanten in (14) lauten endgültig

$$C_1 = \frac{N}{k^2(\pi-\alpha+\operatorname{tg}\alpha)}, \qquad C_2 = \frac{N\sin^2\alpha}{k^2\left[(\pi-\alpha)^2-\sin^2\alpha\right]}, \qquad C_3 = \frac{N\,(\pi-\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)}{k^2\left[(\pi-\alpha)^2-\sin^2\alpha\right]} \quad . \quad (15).$$

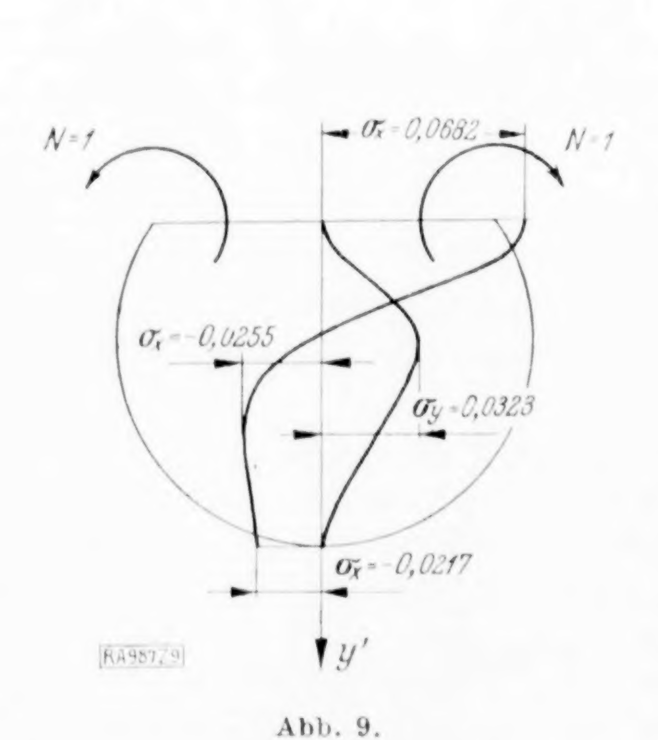


Abb. 9.

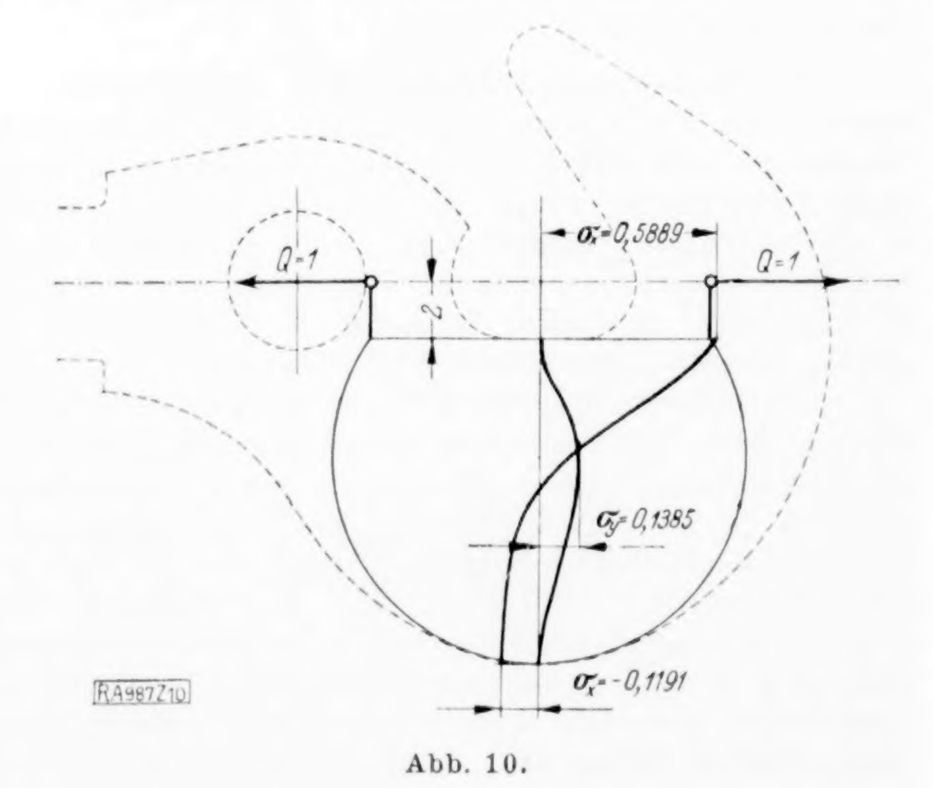


Abb. 10.

In Abb. 9 ist die Spannungsverteilung für $N = 1$ eingetragen worden. Der Spannungsmaßstab ist zehnmal größer wie in Abb. 6.

Schließlich zeigt Abb. 10 die Verteilung im Mittelschnitt, wie sie im Ersatzkörper für den Haken eintreten würde unter der Belastung $Q = 1$, $N = 2$.

4. Die Spannungsverteilung in Eisenbahnzughaken. Die zuletzt angegebene Spannungsverteilung im Mittelschnitt des Ersatzkörpers stellt noch nicht die wirkliche Spannungsverteilung in einem Zughaken vor. Denn erstens ist der Mittelschnitt des Zughakens nicht rechteckig und zweitens üben die anschließenden Teile des Hakens, die außerhalb von unserem Ersatzkörper liegen, von beiden Seiten her eine Störung aus.

Es dürfte kaum ausführbar sein, die erstgenannte Unstimmigkeit durch Anwendung der Theorie der Scheiben mit veränderlicher Dicke [1]) zu beheben. Hingegen können die wirklichen Verhältnisse näherungsweise wie folgt berücksichtigt werden. Denkt man sich die fehlenden Flächen samt den zugehörigen Normalspannungen σ_x vom Rechteck 11×5 cm, dem der wirkliche Querschnitt eingeschrieben ist (Abbild. 11), weggeschnitten, so ergeben die nach den Gl. (6), (7), (8) mit $Q = 1$ berechneten Spannungen σ_x nicht mehr eine in den oberen Rand fallende Resultierende $Q = 5$ kg (die Breite ist jetzt 5 cm), sondern eine Resultierende Q_1 und ein Moment M_1. Ebenso ergeben die nach den Gl. (14), (15) mit $N = 2$ berechneten Spannungen σ_x nicht eine Resultierende Null und ein Moment $N = 10$ cmkg, sondern Q_2 und M_2. Damit die Normalspannungen im Mittelschnitt eine Resultierende 1 von vorgeschriebener Lage besitzen, sind die Teillösungen mit x_1 bzw. x_2 zu multiplizieren und hierauf zu addieren. Zur Bestimmung von x_1 und x_2 dienen die Gleichungen

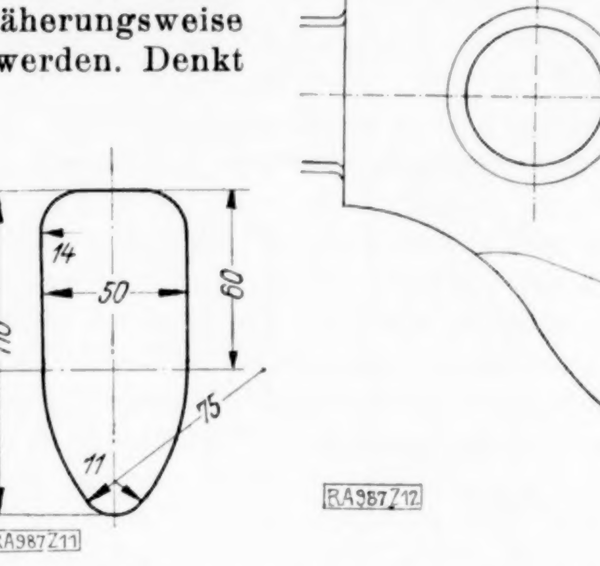


Abb. 11.

Abb. 12.

$$\left. \begin{aligned} x_1 Q_1 + x_2 Q_2 &= 1 \\ x_1 M_1 + x_2 M_2 &= 2 \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16).$$

Das Ergebnis dieser Rechnung ist in Abb. 12 veranschaulicht. Allerdings ist jetzt die Oberfläche nicht völlig spannungsfrei. Man darf jedoch annehmen, daß dieser Mangel nicht stark ins Gewicht fällt, weil die Spannung σ_y, auf die es hier allein ankommt, in den abgeschnittenen Flächenteilen sehr klein wird [2]).

Um der zweiten Unstimmigkeit zu begegnen, könnte man im rechts anschließenden Gebiet den durch logarithmische Spiralen begrenzten Ersatzkörper (siehe Abb. 2) zugrunde legen. Im links anschließenden Gebiet ist die Wahl geeigneter Ersatzkörper mit größeren Schwierigkeiten verbunden. Hierauf wären nach sinngemäßer Uebertragung der Ueberlegungen, die zu den Gl. (16) geführt haben, die Spannungstrajektorien der einzelnen Gebiete zu zeichnen, die Anschlußstellen auszugleichen und eine Verbesserung des Spannungsbildes aus dem neuen »Kraftfluß« anzustreben [3]).

Für eine Zugkraft von 1 kg ergab sich hier eine größte Spannung von 0,1282 kg/cm². Die gleiche Beanspruchung erfährt ein gezogener Stab vom Querschnitt 1 kg : 0,1282 kg/cm²

[1]) A. Föppl, Vorlesungen, V. Bd., S. 64.

[2]) In etwas anderer Weise führt Herr Dr. F. Bleich (Bauing. 1923, S. 330) den Uebergang vom Rechteck zum Kreisquerschnitt durch, indem es die Spannungen σ_x in die der Navierschen Theorie entsprechenden und in Zusatzspannungen zerlegt. Von den Zusatzspannungen wird angenommen, daß sie für Kreis und Rechteck gleich gesetzt werden können.

[3]) Siehe Th. Wyß, Die Kraftfelder in festen elastischen Körpern. Berlin 1926.

= 7,8 cm². Die anderen auf Zug beanspruchten Teile einer Schraubenkupplung des Vereins Deutscher Eisenbahnverwaltungen hatten folgende Querschnitte:

Bügel 12,3 cm², Schraubenspindel 12,6 cm², Laschen 12,6 cm².

Bei Zerreißversuchen mit ganzen Kupplungen, die vom Unterausschuß zur Vorberatung des Antrages auf Einführung einer verstärkten Vereinsschraubenkupplung, eingesetzt vom Technischen Ausschuß in der Sitzung zu Dresden, 19. bis 21. Juni 1907, ausgeführt wurden, entfielen auf Hakenbrüche 62 v. H., während die anderen Teile der Kupplung sich in den Rest im allgemeinen ziemlich gleichmäßig teilten. Der Bericht über diese Versuche läßt auch einen unmittelbaren Vergleich zwischen Rechnung und Versuch zu. Freilich darf man bei derartigen Versuchen keine großen Ansprüche an die Genauigkeit der Uebereinstimmung stellen.

Zahlentafel.

Bezeichnung der Haken	Elastizitätsgrenze der Haken in t		Proportionalitätsgrenze des Werkstoffes in kg/cm²		Quotient in cm²
	einzeln	Mittel	einzeln	Mittel	
V_1	19	21	1250	1250	16,8
V_2	23				
$Ö_1$	22	22,5	2542	2542	8,85
$Ö_2$	23		2542		
U_2	12	12	1154	1019	11,76
			884		
S_1	19	16,5	2542	2487	6,63
S_2	14		2432		
B_1	32	30,5	1879	1879	16,2
B_2	29				
M_1	23	20,5	1436	1436	14,27
M_2	20				
1 M_1	26	23	1879	1879	12,24
1 M_2	20				
2 M_1	23	22,5	2542	2763	8,14
2 M_2	22		2984		
3 M_1	29	25	1879	1879	13,3
3 M_2	21				

Gesamtmittel **12,0** cm²

Bei den Zerreißversuchen mit ganzen Kupplungen wurde eine Meßstrecke von 1650 mm bei verschiedenen Laststufen beobachtet. Die zwei Meßpunkte befanden sich fast an den äußersten Enden der Versuchs-Kupplungen, so daß die Formänderungen aller Kupplungsteile in dieser »Meßstrecke 12« zum Ausdruck kamen. Im Bericht heißt es nun: »Die Elastizitäts- und Streckgrenze konnte bei den Haken mit ziemlicher Sicherheit aus dem Verhalten der Meßstrecke 12 entnommen werden«. Die vom Unterausschuß hierüber gemachten Angaben sind in der Zahlentafel als »Elastizitätsgrenze der Haken in *t*« verzeichnet. Anderseits wurde in den Ergebnissen der Feinmessungen die Proportionalitätsgrenze der betreffenden Werkstoffe mitgeteilt. Nimmt man an, daß die »Elastizitätsgrenze« der Haken mit der »Proportionalitätsgrenze« der meist beanspruchten Stellen zusammenfällt und daß diese Stellen sich am oberen Rand des Mittelschnittes befinden, so müßte der Quotient aus der Elastizitätsgrenze und der Proportionalitätsgrenze den theoretischen Wert 7,8 cm² besitzen. Nach der Zahlentafel trifft dies allerdings nicht zu. Der theoretische Wert wird nur einmal unterschritten, sonst immer überschritten und in einigen Fällen sehr beträchtlich. Das kann nicht überraschen, denn die »Elastizitätsgrenze« war offenbar schwerer genau zu ermitteln als die Proportionalitätsgrenze der Werkstoffe und wurde daher wahrscheinlich meistens zu hoch angegeben. Aus anderen Stellen desselben Berichtes scheint übrigens hervorzugehen, daß die Proportionalitätsgrenze

der Spezialstähle, aus welchen die Haken 1 M 1, 1 M 2, 3 M 1, 3 M 2 verfertigt waren, nicht 1879, sondern im Mittel 3095 kg/cm² betrug und die der Haken 2 M 1 und 2 M 2 nicht 2763, sondern 4308 kg/cm²[1]). Gelten diese höheren Zahlen, so beträgt der Quotient für die Haken 1 M 1 und 1 M 2 nicht 12, 24 sondern **7,43 cm²**, für die Haken 2 M 1 und 2 M 2 nicht 8, 14 sondern **5,22 cm²** und für die Haken 3 M 1 und 3 M 2 nicht 13, 3 sondern **8, 08 cm²**. Dann würde das Gesamtmittel aller Quotienten auf **10,5 cm²** sinken.
987

Bewegung von Wirbeln in einer idealen Flüssigkeit unter dem Einfluß von ebenen Wänden.

Von **WILHELM MÜLLER** in Prag.

1. Einleitung. Die Lösung des Problems, die vollständige Bewegung einzelner Wirbel in einer begrenzten idealen Flüssigkeit zu bestimmen, begegnet im allgemeinen erheblichen rechnerischen Schwierigkeiten. Nur in besonderen Begrenzungsfällen, die dem Verhalten der zur Verfügung stehenden Funktionenklassen angepaßt sind, gelingt es, die Entwickelungen wesentlich zu vereinfachen und übersichtliche Gesetze ausfindig zu machen. So lassen sich z. B., wie namentlich Hr. Jaffé[2]) gezeigt hat, die elliptischen Funktionen in sehr eleganter Weise verwenden zur Darstellung von Strömungen in rechteckig begrenzten Gebieten, deren erzeugende Singularitäten entweder Quellen, resp. Senken oder einfache Wirbel sind. In der zitierten Arbeit werden einige allgemeine Sätze über Bewegungen von Wirbelsystemen abgeleitet, die als eine Erweiterung der klassischen, von Kirchhoff gefundenen Gesetze betrachtet werden können. Die bei der speziellen rechnerischen Verfolgung der Bewegung auftretenden Komplikationen wachsen natürlich ganz bedeutend mit der Zahl der Wirbel, die man zugrunde legt. Schon der Fall eines Systems von zwei Wirbeln, den der Verfasser, wenn auch nicht vollständig allgemein, zu entwickeln gedenkt, macht die Hinzuziehung eines größeren Formelapparats erforderlich, wie er nur in den ausführlichen Handbüchern über elliptische Funktionen zur Verfügung steht. Interesse dürfte auch die schon wesentlich einfacher zu behandelnde Besonderung in Anspruch nehmen, die man erhält, wenn zwei Gegenseiten des Rechtecks oder eine Periode der elliptischen Funktionen unendlich groß werden[3]).

2. Der grundlegende Ansatz. In bezug auf die unmittelbare hydrodynamische Deutung der elliptischen Funktionen darf der Verfasser auf eine einleitende Betrachtung verweisen, die gelegentlich der Hamburger Tagung zum Vortrag gebracht wurde[4]). Wir benutzen zunächst die Weierstraßschen Funktionen σ, ζ, p, p', zwischen denen die folgenden grundlegenden Beziehungen bestehen

$$\left.\begin{aligned} \frac{d \log \sigma(z)}{dz} = \zeta(z), \qquad \frac{d\zeta(z)}{dz} = -p(z), \\ p'(z) = \frac{dp(z)}{dz} = \sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3} = 2\sqrt{(p-e_1)(p-e_2)(p-e_3)} \end{aligned}\right\} \quad (a).$$

Wenn wir voraussetzen, daß die Diskriminante der Normalform 3. Ordnung positiv ist, also die Wurzeln $e_1\ e_2\ e_3$ reell sind, so wird das primitive Periodenparallelogramm ein Rechteck, und es dürfte zweckmäßig sein, für die Halbperiodenzahlen die doppelte Bezeichnung einzuführen

$$\omega_1 = \omega, \qquad \omega_3 = i\,\omega', \qquad \omega_2 = \omega_1 + \omega_3 = \omega + i\,\omega'.$$

---

[1]) Die höheren Werte wurden im Bericht als Elastizitätsgrenzen der Werkstoffe bezeichnet (S. 17 und S. 19 des Berichtes). So kommt bei der Beurteilung der mitgeteilten Ergebnisse noch die Unsicherheit hinzu, was als Elastizitätsgrenze und was als Proportionalitätsgrenze der Werkstoffe angesehen wurde.

[2]) Vergl. G. Jaffé, Ueber zweidimensionale Flüssigkeitsbewegung zwischen parallelen ebenen Wänden, Annalen der Physik, 4. Folge, Bd. 61 (1920), S. 173 bis 194.

[3]) Ein ähnliches Thema, aber mit andern Mitteln, verfolgt die dem Verfasser erst nachträglich bekannt gewordene Arbeit von W. M. Hicks, On the mutual Threading of vortex Rings, Proceedings of the R. Soc. of London, Vol C II, 1923, S. 111 bis 131. Ferner sei noch verwiesen auf die Arbeit von M. Lagally, Münchener Berichte, 1914, S. 377.

[4]) Wilh. Müller, Zur hydrodynamischen Deutung der elliptischen Funktionen, diese Zeitschr. Bd. 8 (1928), S. 447.

Es ist nun bekannt, daß der (mit λ multiplizierte) Logarithmus eines Quotienten von σ-Produkten

$$W = \lambda \log \frac{\sigma(z-z_1)\,\sigma(z-z_2)\ldots\sigma(z-z_m)}{\sigma(z-z_1')\,\sigma(z-z_2')\ldots\sigma(z-z_m')}$$

die Eigenschaft der doppelten Periodizität besitzt unter der Bedingung, daß die Beziehung

$$\Sigma\, z_i = \Sigma\, z_i'$$

besteht. Da sich aber die Funktion $\lg \sigma(z - z_i)$ in der Umgebung des Punktes z_i und den dazu kongruenten Punkten wie $\lg(z - z_i)$ verhält und die σ in allen von z_i verschiedenen, im Endlichen gelegenen Punkten endliche von Null verschiedene Werte annehmen, so kann $W = \Phi + i\Psi$ als Ausdruck für ein Potentialstromfeld aufgefaßt werden, das von einer zweifach periodischen Reihe von Quellen und Senken, resp. von Wirbeln mit teilweise positivem, teilweise negativem Drehsinn erzeugt wird, je nachdem der Faktor λ reell oder rein imaginär ist.

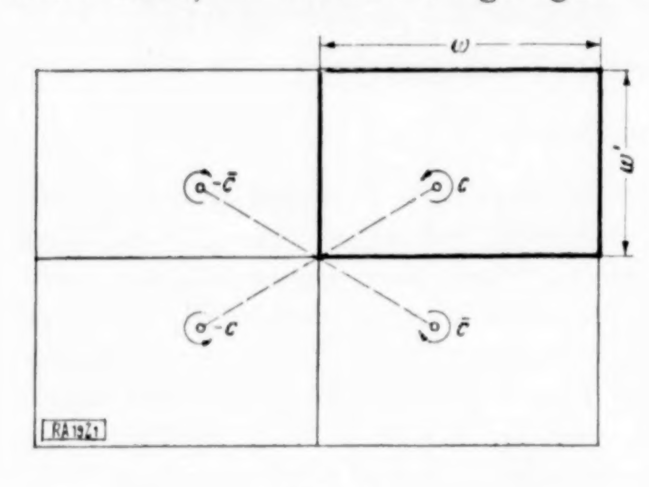


Abb. 1.

Wenn wir im besonderen ein System von n Wirbeln haben an den Stellen $c_\nu = a_\nu + i\,b_\nu$ $(\nu = 1, 2 \ldots n)$ innerhalb des Halbperiodenrechtecks $x = 0, \omega$; $y = 0, \omega'$, das zugleich die Grenze der Strömung darstellen möge, so treten im Potentialausdruck zu jedem Faktor $\sigma(z - c_\nu)$ noch diejenigen drei σ-Glieder hinzu, die sich auf die an den Seiten $x=0$, $y=0$ gespiegelten Wirbel beziehen (vergl. Abb. 1). Indem wir die Stärke des ν-ten Wirbels $= \Gamma_\nu$ und zur Abkürzung $\bar{c}_\nu = a_\nu - i\,b_\nu$ setzen, entsteht das Potential

$$W = -\frac{i}{2\pi}\sum_{\nu=1}^{n} \Gamma_\nu \lg \frac{\sigma(z-c_\nu)\,\sigma(z+c_\nu)}{\sigma(z-\bar{c}_\nu)\,\sigma(z+\bar{c}_\nu)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

und die zugehörige, als Summe von ζ-Funktionen darstellbare komplexe Feldgeschwindigkeit

$$\bar{v} = \frac{dW}{dz} = -\frac{i}{2\pi}\,\Sigma\,\Gamma_\nu\,[\zeta(z-c_\nu) + \zeta(z+c_\nu) - \zeta(z-\bar{c}_\nu) - \zeta(z+\bar{c}_\nu)] \quad . \quad (2)$$

die sich durch Anwendung des Additionstheorems der ζ auch durch die doppeltperiodischen p- und p'-Funktionen (resp. durch die Jakobischen Funktionen) ausdrücken läßt. Bei der Trennung des Reellen und des Imaginären muß man die komplementären, nach dem Vorgang von Halphen[1]) durch horizontale Striche zu kennzeichnenden Funktionen einführen, die aus den ursprünglichen durch Vertauschung der Periodenzahlen oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch Aenderung des Vorzeichens von g_3, resp. Ersetzung der Wurzeln e_1, e_2, e_3 durch $-e_3$, $-e_2$, $-e_1$ hervorgehen. Man hat dann die Beziehungen

$$p(iy) = -\bar{p}(y), \qquad p'(iy) = i\,\bar{p}'(y), \qquad \zeta(iy) = -i\,\bar{\zeta}(y) \quad . \; . \; . \quad (b)$$

$$\zeta(x+iy) = \zeta x - i\,\bar{\zeta} y + \frac{1}{2}\,\frac{p'x - i\,\bar{p}'y}{px + \bar{p}y} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (c)$$

und kann leicht auf Grund der weiteren Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} p(z) = p(-z), \quad p'(z) = -p'(-z), \quad p(\omega+z) = p(\omega-z), \\ p'(\omega+z) = -p'(\omega-z) \quad \text{usw.} \end{array}\right\} \quad (d)$$

in direkter Weise zeigen, daß durch (1) und (2) die Grenzbedingungen erfüllt sind, d. h. daß für $x = 0$ oder $x = \omega$ die x-Komponente und für $y = 0$ und $y = \omega'$ die y-Komponente der Stromgeschwindigkeit verschwindet.

Hat das Rechteck beliebige Abmessungen l und h, so hat man das System der elliptischen Funktionen mit dem Periodenverhältnis $\frac{\omega}{\omega'} = \frac{l}{h}$ zu wählen und statt $z - c$ die Variable $\frac{(z-c)\,\omega}{l}$ einzuführen. Ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, werden wir im folgenden voraussetzen, daß die Maßzahlen der Seitenlängen mit den Periodenzahlen ω ω' übereinstimmen.

[1]) G. H. Halphen, Traité des fonctions elliptiques, I. P. Paris 1886.

Den Uebergang zu den Fällen, daß eine der Perioden 2ω oder $2\omega'$ unendlich wird, vermittelt die aus der Theorie der elliptischen Funktionen bekannte Reihenentwicklung

$$\lg \sigma(z) = \frac{\eta z^2}{2\omega} + \lg\left(\frac{2\omega}{\pi}\sin\frac{\pi z}{2\omega}\right) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\,\frac{1-\cos\frac{n\pi z}{\omega}}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e),$$

in der $\eta = \zeta\,\omega$ und $q = e^{-\pi\frac{\omega'}{\omega}}$ zu setzen ist. Durch Vermittlung der Beziehung

$$\sigma(z) = i\,\sigma(-iz) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b')$$

entsteht ferner bei Einführung der Bezeichnungen $\eta' = \overline{\zeta}\,\omega'$ und $q' = e^{-\pi\frac{\omega}{\omega'}}$ die weitere Reihe

$$\lg \sigma(z) = -\frac{\eta' z^2}{2\omega'} + \lg\left(\frac{2\omega'}{\pi}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi z}{2\omega'}\right) + 2\sum_{1}^{\infty}\frac{q'^{2n}}{1-q'^{2n}}\,\frac{1-\mathfrak{Cos}\,\frac{n\pi z}{\omega'}}{n} \quad . \quad . \quad . \quad (f).$$

Wenn z. B. ω unendlich wird und damit die Grenze der Strömung auf zwei parallele horizontale Ebenen sich reduziert, so verschwindet q', und wir erhalten

$$\lg \sigma(z) = -\frac{\eta' z^2}{2\omega'} + \lg\frac{2\omega'}{\pi} + \lg\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi z}{2\omega'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f').$$

Bei der Einsetzung in (1) vereinigen sich aber die beiden ersten nach (f') gebildeten Glieder zu einer Konstanten, so daß dieser Grenzfall darauf hinausläuft, die σ-Funktionen durch die entsprechenden hyperbolischen $\mathfrak{Sin}$ zu ersetzen. Wenn man also schließlich noch für $\frac{\pi z}{2\omega'}$ wieder z setzt, so erhält man als Potential der von einem System diskreter Wirbel in einem »ebenen Kanal« von der Breite $h = \pi/2$ erzeugten Strömung den Ausdruck

$$W = -\frac{i}{2\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\Gamma_\nu \lg\frac{\mathfrak{Sin}(z-c_\nu)\,\mathfrak{Sin}(z+c_\nu)}{\mathfrak{Sin}(z+\overline{c}_\nu)\,\mathfrak{Sin}(z-\overline{c}_\nu)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und entsprechend für die Geschwindigkeitsfunktion

$$\overline{v} = -\frac{i}{2\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\Gamma_\nu\left[\mathfrak{Ctg}(z-c_\nu) + \mathfrak{Ctg}(z+c_\nu) - \mathfrak{Ctg}(z-\overline{c}_\nu) - \mathfrak{Ctg}(z+\overline{c}_\nu)\right] \quad (4).$$

Um nun die Bewegung eines Wirbels c_ν zu ermitteln, haben wir in dem Ausdruck (2) resp. (4) für die Geschwindigkeit denjenigen Bestandteil zu unterdrücken, der sich auf den Wirbel selbst bezieht. Da nun aber die Bewegungsantriebe der beiden senkrecht zueinander gerichteten periodischen Reihen gleichdrehender Wirbel, die den Wirbelpunkt enthalten, sich gegenseitig aufheben, so erhalten wir die Bewegungsgeschwindigkeit $\overline{v}$ des ν-ten Wirbelkernes dadurch, daß wir den Ausdruck $\zeta(z-c_\nu)$ in (2) [resp. $\mathfrak{Ctg}(z-c_\nu)$ in (4)] weglassen und in den übrigen Ausdrücken $z = c_\nu$ einsetzen. Nach diesen Grundsätzen sollen die Bewegungsverhältnisse für die Fälle $n = 1, 2$; $\Gamma_1 = \pm\Gamma_2 = \Gamma$ näher untersucht werden.

3. Der Fall eines Wirbels im Rechteck und die verwandten symmetrischen Fälle. Wenn ein einziger Wirbel in $z = c$ gegeben ist, so erhalten wir aus dem Ausdruck für die komplexe Feldgeschwindigkeit

$$\overline{v} = -\frac{i\Gamma}{2\pi}\left[\zeta(z-c) + \zeta(z+c) - \zeta(z-\overline{c}) - \zeta(z+\overline{c})\right]$$

die Geschwindigkeit des Wirbelkerns

$$\overline{v}_c = -\frac{i\Gamma}{2\pi}\left[\zeta\,2c - \zeta\,2a - \zeta\,2ib\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

oder durch Anwendung des auf komplexe Argumente ausgedehnten Additionstheorems der ζ [vergl. (c)]

$$\overline{v}_c = -\frac{i\Gamma}{4\pi}\,\frac{p'\,2a - i\,\overline{p'}\,2b}{p\,2a + \overline{p}\,2b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Die Geschwindigkeitskomponenten erhalten daher die einfachen Werte

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\Gamma}{4\pi}\,\frac{\bar{p}'\,2\,b}{p\,2\,a + \bar{p}\,2\,b}, \qquad \frac{db}{dt} = \frac{\Gamma}{4\pi}\,\frac{p'\,2\,a}{p\,2\,a + \bar{p}\,2\,b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6\,a)$$

und die daraus durch Division sich ergebende Differentialgleichung

$$\frac{da}{db} = -\frac{\bar{p}'\,2\,b}{p'\,2\,a}$$

führt zu der einfachen Integralbeziehung

$$p\,2\,a + \bar{p}\,2\,b = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

in der alle möglichen Bahnen eines Wirbels enthalten sind.

Wenn a und b klein sind, der Wirbel also in der Nähe der einen Ecke des Rechtecks gelegen ist, so reduziert sich die Gleichung auf die Form

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c_0{}^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7\,a).$$

Die Bahnen nähern sich also hier der Gestalt einer Kreuzkurve. Gleichzeitig wird durch (7 a) die Bewegung eines Wirbels in einem von zwei senkrechten Ebenen, sonst aber unbegrenzten Gebiet, resp. die Bewegung von vier wie die Eckpunkte eines Rechtecks zueinander gelegenen und paarweise entgegengesetzten Wirbel in der unbegrenzten Flüssigkeit dargestellt [1]).

Um ferner den Charakter der Wirbelbahn in der Nähe des Mittelpunktes unseres Rechtecks zu bestimmen, setze man

$$2\,a = \omega + 2\,\alpha, \qquad 2\,b = \omega' + 2\,\beta.$$

Berücksichtigt man die Beziehungen

$$p\,(2\,\alpha + \omega) = e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{p\,2\,\alpha - e_1}, \quad \bar{p}\,(2\,\beta + \omega') = -\,e_3 + \frac{(e_1 - e_3)(e_1 - e_3)}{\bar{p}\,2\,\beta + e_3} \qquad (g)$$

und beschränkt sich auf die Anfangsglieder der Reihe

$$p(2\,\alpha) = \frac{1}{(2\,\alpha)^2} + \frac{g_2}{20}(2\,\alpha)^2 + \ldots,$$

so ergibt sich, wenn α und β als klein vorausgesetzt werden, als Gleichung der Wirbelbahn

$$\alpha^2 (e_1 - e_2) + \beta^2 (e_2 - e_3) = C, \qquad \frac{\alpha^2}{\alpha_0{}^2} + \frac{\beta^2}{\beta_0{}^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7\,b).$$

Zusammenfassend kann man daher sagen: **In einem prismatisch abgegrenzten Flüssigkeitsraum beschreibt ein Wirbel eine geschlossene Bahn. Die den verschiedenen Anfangslagen entsprechenden Bahnkurven nehmen vom Rande her, dem sie sich anschließen, nach innen zu mehr und mehr elliptische Gestalt an und gehen schließlich im Mittelpunkt in eine Grenzellipse über, deren Achsen das Verhältnis**

$$\frac{\alpha_0}{\beta_0} = \frac{\sqrt{e_2 - e_3}}{\sqrt{e_1 - e_2}}$$

haben (Abb. 2) [2]). Dieses Verhältnis, das übrigens übereinstimmt mit dem Verhältnis k/k' des Moduls zum komplementären Modul der zum gleichen Periodenverhältnis gehörigen Jakobischen Funktionen, berechnet sich aus dem Seitenverhältnis des Rechtecks durch eine Reihe, resp. durch ein unendliches Produkt. Benutzt man die oben eingeführte Zahl q, so hat man nach bekannter Formel [3])

Abb. 2.

$$\frac{\alpha_0}{\beta_0} = \frac{k}{k'} = 4\,q^{1/2} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + q^{2n}}{1 - q^{2n-1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

[1]) Vergl. H. Lamb, Hydrodynamics, Cambridge 1916, S. 217, wo weitere Literaturnachweise zu finden sind.

[2]) Bei den Versuchen von Herrn Bjerkneß mit rotierenden Zylindern, die auf Wasser schwimmen, wurden Bewegungen beobachtet, die mit den Ergebnissen der Theorie manche Uebereinstimmung zeigten.

[3]) Vergl. Halphen, a. a. O., S. 402.

Ist z. B. $\pi \frac{\omega'}{\omega} = 2$, $\frac{\omega}{\omega'}$ also $\sim \frac{25}{16}$, so ergibt sich für das Achsenverhältnis der Grenzellipse der Wert $\frac{\alpha_0}{\beta_0} \sim \frac{3}{1}$.

Zur weiteren Charakterisierung der Bewegung bestimmen wir das Quadrat der Absolutgeschwindigkeit

$$v^2 = \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 C}(12 p^2 2a - 12 C p 2a + 4 C_2 - g_2) = \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 C}(12 \bar{p}^2 2b - 12 C \bar{p} 2b + 4 C^2 - g_2) \quad (9).$$

Man sieht dann unmittelbar, daß die Geschwindigkeit in den Scheitelpunkten der Bahnkurven ein absolutes, resp. ein relatives Maximum erreicht mit den Quadratwerten

$$\left.\begin{aligned} (v_1{}^2)_{2a=\omega} &= \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 C}(12 e_1{}^2 - g_2 - 12 C e_1 + 4 C_2) \\ (v_2{}^2)_{2b=\omega'} &= \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 C}(12 e_3{}^2 - g_2 - 12 C e_3 + 4 C_2) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (10),$$

während die Stellen absolut kleinster Geschwindigkeit, die gleichzeitig die Stellen größter Krümmung sind, der Gleichung

$$p\, 2a - \bar{p}\, 2b = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

entsprechen. Die Geschwindigkeit selbst hat hier den Wert

$$v_3{}^2 = v_{\min}^2 = \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 C}(C^2 - g_2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (12).$$

Die Kurve für die Punkte kleinster Bahngeschwindigkeit geht von den Eckpunkten des Rechteckes aus unter einem Winkel $\pi/4$ gegen die Seiten und schneidet die längere der beiden Mittellinien. Wenn nämlich $\alpha_0 > \beta_0$ ist, dann wird $e_2 > 0$, also wegen $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, e_3 negativ und absolut größer als e_1; daher wird die Gl (11) zwei reelle Wurzeln haben, von denen die eine $2a < \omega$ sein muß. Die Kurve (11) schneidet also die horizontale Mittellinie in zwei zum Zentrum symmetrisch gelegenen Punkten. Jeder dieser Schnittpunkte hat als Punkt einer Bahnkurve die ausgezeichnete Eigenschaft, daß in ihm die beiden Punkte des relativen Maximums und des absoluten Minimums der Geschwindigkeit zusammenfallen. Auf den weiter nach innen gelegenen Bahnkurven ($C < 2 e_3$) hat die Geschwindigkeit nur in den Scheitelpunkten extreme Werte.

Die zweite Integration, d. h. die Bestimmung der Abhängigkeit der Lage des Wirbels von der Zeit kann in dem allgemeinen elliptischen Fall jedenfalls auf eine Quadratur zurückgeführt werden. Wenn wir die grundlegenden Beziehungen

$$p' = \sqrt{4 p^3 - g_2 p - g_3}; \qquad \bar{p}' = \sqrt{4 \bar{p}_3 - g_2 \bar{p} + g_3}$$

benutzen, so ergibt aus (7)

$$t = -\frac{4\pi C}{\Gamma} \int \frac{da}{\sqrt{4(C - p\, 2a)^3 - g_2 (C - p\, 2a) + g_3}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (13).$$

Zur Erleichterung der Konstruktion erscheint es zweckmäßig, die Formeln auf die Jakobischen Funktionen *sn*, *cn*, *dn* umzurechnen. Mit den bekannten Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} p z = e_1 + \lambda^2 \frac{cn^2 \lambda z}{sn^2 \lambda z} = e_3 + \lambda^2 \frac{1}{sn^2 \lambda z}, \qquad \bar{p} z = -e_1 + \lambda^2 \frac{1}{sn^2 \lambda z} = -e_3 + \lambda^2 \frac{cn^2 \lambda z}{sn^2 \lambda z} \\ \lambda = \sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\omega}{K} = \frac{\omega'}{K'} \end{aligned}\right\} \quad (h)$$

erhält man z. B. für das System der Bahnkurven, wenn man gleichzeitig den Längenmaßstab so verändert, daß die Seiten des Rechtecks durch die mit ω und ω' proportionalen Jakobischen Periodenzahlen K und K' ausgedrückt werden

$$\frac{1}{sn^2\, 2a} + \frac{cn^2\, 2b}{sn^2\, 2b} = C' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (14).$$

Wenn man den Anfangspunkt in den Mittelpunkt verlegt, so geht die Gleichung der Bahnkurven wegen

$$\left.\begin{aligned} sn(2a + K) = \frac{cn\, 2a}{dn\, 2a}, \qquad cn(2a + K) = -k' \frac{sn\, 2a}{dn\, 2a}; \qquad dn(2a + K) = \frac{k'}{dn\, 2a} \text{ usw.} \\ dn^2 = k'^2 + k^2 cn^2, \; sn^2 + cn^2 = 1 \end{aligned}\right\} \quad (i)$$

über in
$$\frac{k'^2}{cn^2\,2\,\alpha}+\frac{k^2}{cn^2\,2\,\beta}=C' \qquad (14a).$$
Diese Formeln in Verbindung mit den Jahnke-Emdeschen Tafeln sind der Konstruktion der Bahnkurven für ein Beispiel zugrunde gelegt worden, das folgenden Zahlenwerten entspricht (vergl. Abb. 2).
$$k=\sin 60^0=0{,}867\,,\qquad k'=\sqrt{1-k^2}=\sin 30^0=0{,}5\,,\qquad K=2{,}156\,,\qquad K'=1{,}685.$$
Mit dem eben betrachteten Fall sind gleichzeitig die anderen Fälle als erledigt zu betrachten, die man erhält, wenn man das ursprüngliche Halbperiodenrechteck um die anliegenden Rechtecke vergrößert, in denen das Stromfeld des ersten Rechtecks in gespiegelter Form sich wiederfindet. So ist die Bewegung eines Wirbels gleichbedeutend mit dem Fall zweier zur vertikalen Mittellinie symmetrischer Gegenwirbel in dem verdoppelten Rechteck mit den Seiten $2\,\omega$ und ω'.

4. Ein Wirbel und zwei Gegenwirbel in einem ebenen Kanal in gleichen Abständen von jeder Stromgrenze. Wenn wir im Falle des vorigen Abschnittes den Anfangspunkt in den Mittelpunkt legen und dann die horizontale Seite ins Unendliche wachsen lassen, so bleibt im Endlichen ein Wirbel in einem Kanal übrig, der sich nach den Formeln (5) und (6) mit der Geschwindigkeit
$$\frac{da}{dt}=\frac{\Gamma}{2\pi}\,\mathrm{tg}\,2\,b \qquad (15).$$
in der Richtung der Stromgrenzen bewegt. Wenn wir dagegen den Anfangspunkt in einer Ecke belassen und nun die Seitenlängen ω der beiden zur y-Achse symmetrischen Rechtecke $x=0,\pm\omega,\ y=0,+\omega'$ unendlich groß werden lassen, so haben wir den Fall zweier Gegenwirbel im ebenen Kanal, deren Verbindungslinie der Kanalgrenze parallel ist, resp. den Fall eines Wirbels in einem Gebiet, das von zwei Parallelebenen und einer dazu senkrechten Ebene begrenzt ist.

Aus der allgemeinen Formel (4) erhalten wir dann für die Geschwindigkeit des in $z=c$ gelegenen Wirbels
$$\bar{v}=-\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi}\left[\mathfrak{Ctg}\,2\,c-\mathfrak{Ctg}\,2\,a+i\,\mathrm{ctg}\,2\,b\right]$$
oder nach Trennung des Reellen vom Imaginären vermöge
$$\mathfrak{Ctg}\,(x+i\,q)=\frac{\mathfrak{Sin}\,x\,\mathfrak{Cof}\,x-i\sin y\cos y}{\mathfrak{Sin}^2\,x+\sin^2 y}$$
für die Komponenten die Ausdrücke
$$\frac{da}{dt}=\frac{\Gamma}{2\,\pi}\,\mathrm{ctg}\,2\,b\,\frac{\mathfrak{Sin}^2\,2\,a}{\mathfrak{Sin}^2\,2\,a+\sin^2 2\,b},\qquad \frac{db}{dt}=-\frac{\Gamma}{2\,\pi}\,\mathfrak{Ctg}\,2\,a\,\frac{\sin^2 2\,b}{\mathfrak{Sin}^2\,2\,a+\sin^2 2\,b} \qquad (16),$$
die zur Gleichung der Bahnkurven führen
$$\mathfrak{Ctg}^2\,2\,a+\mathrm{ctg}^2\,2\,b=C \qquad (17).$$
Dieselbe Gleichung ergibt sich auch aus (14), wenn man berücksichtigt, daß für $K=\infty$ oder $k=1$) K in $\pi/2$, ferner $sn\,2\,a$ in $\mathfrak{Tg}\,2\,a$, $cn\,2\,b$ in $\cos 2\,b$, $sn\,2\,b$ in $\sin 2\,b$ übergeht.

Das Quadrat der Absolutgeschwindigkeit wird mit (17)
$$\left.\begin{aligned} v^2&=\frac{\Gamma^2}{4\,\pi^2 C}\left[(C+1)^2+3\,\mathfrak{Ctg}^4\,2\,a-(3\,C+4)\,\mathfrak{Ctg}^2\,2\,a\right]\\ &=\frac{\Gamma^2}{4\,\pi^2 C}\left[(C-1)^2+3\,\mathrm{ctg}^4\,2\,a-(3\,C-4)\,\mathrm{ctg}^2\,2\,a\right]\end{aligned}\right\} \qquad (18).$$

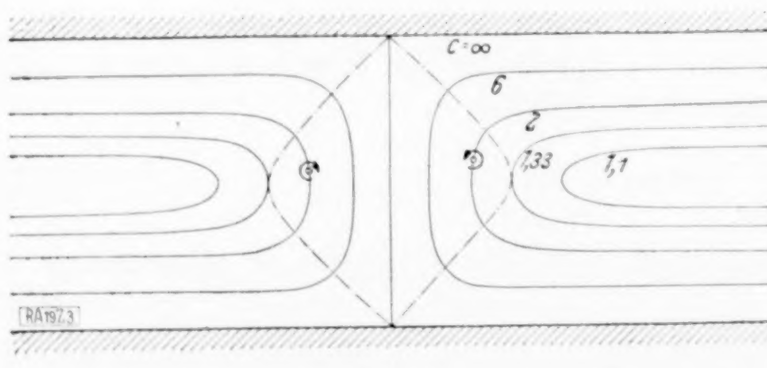


Abb. 3.

Der Verlauf der Bewegung ist aus der Abb. 3 ersichtlich. Die Wirbel nähern oder entfernen sich voneinander, je nachdem sie im oberen oder unteren Teil des Kanals liegen. Während der geringste Abstand $2\,a$ nach (17) aus
$$\mathfrak{Ctg}^2\,2\,a=C$$
zu berechnen ist, ergibt sich der Abstand b von der Wand, den jeder Wirbel asymptotisch im Unendlichen $(a=\infty)$ erreicht, aus der Gleichung
$$\mathrm{ctg}^2\,2\,b=C-1\,.$$

An den Stellen kleinsten Abstandes erreicht gleichzeitig die Geschwindigkeit das relative Maximum v_2, im Unendlichen das absolute Maximum v_1 und für

$$\mathfrak{Ctg}^2\, 2\, a = \frac{3\,C+4}{6}\,, \qquad \operatorname{ctg}^2 2\, b = \frac{3\,C-4}{6}$$

das absolute Minimum v_3. Für die Quadrate erhält man aus

$$v_1^2 = \frac{\Gamma^2}{4\,\pi^2}(C-1)\,, \qquad v_2^2 = \frac{\Gamma^2}{4\,\pi^2 C}(C-1)^2, \qquad v_3^2 = \frac{\Gamma^2}{4\,\pi^2 C}\left(\frac{1}{4}\,C^2 - \frac{1}{3}\right) \qquad (19).$$

Die Geschwindigkeitswerte v_2 und v_3 werden einander gleich für $C = {}^4/_3$, $\mathfrak{Ctg}^2\, 2\, a = {}^4/_3$, $2\, b = {}^\pi/_2$. In dem betreffenden Punkt schneidet die Kurve kleinster Bahngeschwindigkeit

$$\mathfrak{Ctg}^2\, 2\, a - \operatorname{ctg}^2 2\, b = {}^4/_3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

die Mittellinie des Kanals. (Vergl. Abb. 3).

5. Zwei gleichsinnige Wirbel im Rechteck bei unveränderter Schwerpunktslage. Aus dem Grundpotential für den allgemeinen Fall zweier gleichsinniger und gleichstarker Wirbel

$$W = -\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi} \lg \frac{\sigma(z-c_1)\,\sigma(z+\bar{c}_1)\,\sigma(z-c_2)\,\sigma(z+\bar{c}_2)}{\sigma(z-\bar{c}_1)\,\sigma(z+c_1)\,\sigma(z-\bar{c}_2)\,\sigma(z+c_2)}$$

leiten sich durch Differentiation und Anwendung der Formel (d) folgende Ausdrücke ab für die doppelten Komponenten des Wirbelschwerpunktes

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d(a_1+a_2)}{dt} &= \frac{\Gamma}{2\,\pi}\left[-\frac{1}{2}\,\frac{\bar{p}'\,2\,b_1}{p\,2\,a_1+\bar{p}\,2\,b_1} - \frac{1}{2}\,\frac{\bar{p}'\,2\,b_2}{p\,2\,a_2+\bar{p}\,2\,b_2} - \frac{\bar{p}'(b_1+b_2)}{p(a_1+a_2)+\bar{p}(b_1+b_2)} + \frac{\bar{p}'(b_1+b_2)}{p(a_1-a_2)+\bar{p}(b_1+b_2)}\right] \\
\frac{d(b_1+b_2)}{dt} &= \frac{\Gamma}{2\,\pi}\left[\frac{1}{2}\,\frac{p'\,2\,a_1}{p\,2\,a_1+\bar{p}\,2\,b_1} + \frac{1}{2}\,\frac{p'\,2\,a_2}{p\,2\,a_2+\bar{p}\,2\,b_2} + \frac{p'(a_1+a_2)}{p(a_1+a_2)+\bar{p}(b_1+b_2)} - \frac{p'(a_1+a_2)}{p(a_1+a_2)+\bar{p}(b_1-b_2)}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (21).$$

Wenn nun im besonderen $a_1 + a_2 = \omega$, $b_1 + b_2 = \omega'$ ist, so werden wegen $p'\,2\,a_1 = -p'\,2\,a_2$, $\bar{p}'\,2\,b_1 = -\bar{p}'\,2\,b_2$, $p'\,\omega = \bar{p}'\,\omega' = 0$ beide Ausdrücke gleich Null. Nimmt also der Schwerpunkt die Mitte des Rechtecks ein, so wird er, wie übrigens auch aus Symmetriegründen klar ist, seine Lage während der Bewegung der Wirbel beibehalten. Wir werden uns zunächst auf die Betrachtung dieses Sonderfalles beschränken. Wenn man dann den Schwerpunkt oder Mittelpunkt als Anfang der Koordinatenzählung nimmt und $c_1 = -c_2 = c$ setzt, so schreibt sich die Bahngeschwindigkeit des Wirbels in $z = c$.

$$\begin{aligned}
\bar{v}_c &= -\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi}\left[\zeta\,2\,c + \eta_2 + \zeta(2\,c+\omega_2) - \zeta(2\,i\,b+\omega_3) - \zeta(2\,a+\omega_3) - \zeta(2\,i\,b+\omega_1) - \zeta(2\,a+\omega_1)\right] \\
&= -\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi}\left[\frac{p'\,2\,a - i\,\bar{p}'\,2\,b}{p\,2\,a+\bar{p}\,2\,b} - \frac{p'\,2\,a}{p\,2\,a-e_3} + \frac{i\,\bar{p}'\,2\,b}{\bar{p}\,2\,b+e_1} + \frac{p'(2\,a+\omega_1) - p'(2\,i\,b+\omega_3)}{p(2\,a+\omega_1) - p(2\,i\,b+\omega_3)}\right].
\end{aligned}$$

Durch Vermittlung der bekannten Formeln

$$\left.\begin{aligned}
p(z+\omega_1) &= e_1 + \frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{p\,z-e_1}\,, \qquad p'(z+\omega_1) = -\frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{(p\,z-e_1)^2}\,p'\,z \\
p(z+\omega_3) &= e_3 + \frac{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}{p\,z-e_3}\,, \qquad p'(z+\omega_3) = -\frac{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}{(p\,z-e_3)^2}\,p'\,z
\end{aligned}\right\} \quad (k)$$

läßt sich der Ausdruck folgendermaßen zerlegen

$$\left.\begin{aligned}
v_a &= \frac{da}{dt} = \frac{\Gamma}{4\,\pi}\,\frac{\bar{p}'\,2\,b\,(p\,2\,a-e_1)(p\,2\,a-e_3)(\bar{p}^2\,2\,b + 2\,e_2\,\bar{p}\,2\,b - e_2^2 - e_1\,e_3)}{(\bar{p}\,2\,b+e_1)(\bar{p}\,2\,b+e_3)(p\,2\,a+\bar{p}\,2\,b)(p\,2\,a\,\bar{p}\,2\,b + e_2(p\,2\,a-\bar{p}\,2\,b) + e_2^2 + e_1\,e_3)} \\
v_b &= \frac{db}{dt} = \frac{\Gamma}{4\,\pi}\,\frac{p'\,2\,a\,(\bar{p}\,2\,b+e_1)(\bar{p}\,2\,b+e_3)(p^2\,2\,a - 2\,e_2\,p\,2\,a - e_2^2 - e_1\,e_3)}{(p\,2\,a-e_1)(p\,2\,a-e_3)(p\,2\,a+\bar{p}\,2\,b)(p\,2\,a\,\bar{p}\,2\,b + e_2(p\,2\,a-\bar{p}\,2\,b) + e_2^2 + e_1\,e_3)}
\end{aligned}\right\} \quad (22).$$

In der daraus zu gewinnenden Differentialgleichung lassen sich die Variablen unmittelbar trennen und wir erhalten das relativ einfache Integral als Darstellung der Bahnkurvenschar.

$$\frac{p\,2\,a-e_2}{(p\,2\,a-e_1)(p\,2\,a-e_3)} + \frac{\bar{p}\,2\,b+e_2}{(\bar{p}\,2\,b+e_1)(\bar{p}\,2\,b+e_3)} = C \quad \ldots\ldots \quad (23).$$

Man sieht unmittelbar, daß $C = \infty$ wieder den Grenzen des Rechtecks entspricht wegen $p\,\omega = e_1$, $\bar{p}\,\omega' = -e_3$. Setzen wir ferner $C = \frac{1}{e_1 - e_3}$ und benutzen die Formeln

$$p\,\frac{\omega}{2} = e_1 + \sqrt{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}, \qquad \bar{p}\,\frac{\omega'}{2} = -e_3 + \sqrt{(e_1-e_2)(e_1-e_3)} \quad . \quad . \quad (l),$$

so ergibt sich, daß die dem Werte $C = \frac{1}{e_1 - e_3}$ entsprechende Bahnkurve die Arme des Mittelkreuzes des grundlegenden Rechteckes halbiert.

Wenn schließlich a und b und damit auch die Bahnkonstante C klein sind, so geht mit $C = 4\varrho^2$, da sich die Funktion $\mathfrak{p}\, z$ für kleine Argumente wie $\frac{1}{z^2}$ verhält, die Bahngleichung in die Grenzform

$$a^2 + b^2 = \varrho^2$$

über. Im ganzen schließt man, daß **die Wirbelbahnen geschlossene Kurven sind, die, je näher die Wirbel dem Mittelpunkt des Rechteckes liegen, um so mehr Kreisform annehmen** (Abb. 4).

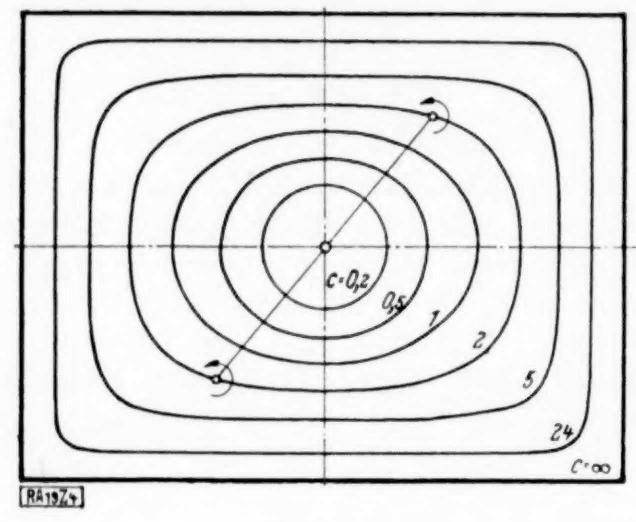


Abb. 4.

Zur Uebertragung auf die Jakobischen Funktionen dienen neben (f) noch die Formelgruppen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{p}'z &= -2\lambda^3 \frac{dn\lambda z\, cn\lambda z}{sn^3 \lambda z}, & \frac{1}{z}\frac{\mathfrak{p}'z}{\mathfrak{p}z - e_1} &= -\lambda \frac{dn\lambda z}{cn\lambda z\, sn\lambda z} \\ \frac{1}{z}\frac{\mathfrak{p}'z}{\mathfrak{p}z - e_2} &= -\lambda \frac{cn\lambda z}{dn\lambda z\, sn\lambda z}, & \frac{1}{z}\frac{\mathfrak{p}'z}{\mathfrak{p}z - e_3} &= -\lambda \frac{dn\lambda z\, cn\lambda z}{sn\lambda z} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (m)$$

und die entsprechenden für die komplementären Funktionen, für die $e_1\, e_2\, e_3$ durch $-e_3\, -e_2\, -e_1$ zu ersetzen sind. Wenn man wieder λ unterdrückt, also die Rechtecksseiten unmittelbar durch die Periodenzahlen K und K' ausdrückt, so erhält man für die Geschwindigkeit des Wirbels in $z = c$ die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} v_a &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\overline{sn}\, 2b \cdot \overline{dn}\, 2b \cdot cn^2\, 2a\, (k^2 + k'^2\, \overline{cn}^4\, 2b)}{\overline{cn}\, 2b\, (1 - cn^2\, 2a\, \overline{cn}^2\, 2b)\, (k^2\, cn^2\, 2a + k'^2\, \overline{cn}^2\, 2b)} \\ v_b &= \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{sn\, 2a \cdot dn\, 2a \cdot \overline{cn}^2\, 2b\, (k'^2 + k^2\, cn^4\, 2a)}{cn\, 2a\, (1 - cn^2\, 2a \cdot \overline{cn}^2\, 2b)\, (k^2\, cn^2\, 2a + k'^2\, \overline{cn}^2\, 2b)} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (22a),$$

während die Integralgleichung der Wirbelbahnen die Form

$$\frac{k'^2}{cn^2\, 2a} - k^2\, cn^2\, 2a + \frac{k^2}{\overline{cn}^2\, 2b} - k'^2\, \overline{cn}^2\, 2b = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23a).$$

erhält. Zur mittleren Bahnlinie, die durch die Punkte $2a = K$, $b = 0$, $2b = K'$, $a = 0$ hindurchgeht, gehört in diesem Fall die Konstante $C = 1$, wie man aus den Beziehungen

$$cn\frac{K}{2} = \sqrt{\frac{k'}{1 + k'}}, \qquad \overline{cn}\frac{K'}{2} = \sqrt{\frac{k}{1 + k}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (n)$$

unmittelbar schließt.

6. Ein Paar gleichartiger Wirbel mit unveränderter Schwerpunktslage im ebenen Kanal. In diesem Fall erhalten wir Beziehungen, die mit den entsprechenden im Abschnitt 4 große Analogie zeigen. Aus dem Ausdruck für die Feldgeschwindigkeit, der in diesem Fall lautet

$$\bar{v} = -\frac{i\,\Gamma}{2\pi}\,[\mathfrak{Ctg}\,(z - c) + \mathfrak{Ctg}\,(z + c) - \mathfrak{Tg}\,(z - \bar{c}) - \mathfrak{Tg}\,(z + \bar{c})],$$

ergibt sich nach Zerlegung der komplexen Funktionen für die Geschwindigkeit des in $z = c$ gelegenen Wirbels

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\Gamma}{2\pi}\, \mathrm{tg}\, 2b\, \frac{\mathfrak{Cof}^2\, 2a}{\mathfrak{Sin}^2\, 2a + \sin^2 2b}; \qquad \frac{db}{dt} = \frac{\Gamma}{2\pi}\, \mathfrak{Tg}\, 2a\, \frac{\cos^2 2b}{\mathfrak{Sin}^2\, 2a + \sin^2 2b} \quad (24).$$

Die Schar der Wirbelbahnen enthält die einfache Gleichung

$$\mathfrak{Tg}^2\, 2a + \mathrm{tg}^2\, 2b = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25),$$

woraus dann die reduzierten Geschwindigkeitswerte entstehen

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\Gamma}{2\pi C} \frac{\mathrm{tg}\, 2b}{\cos^2 2b}; \qquad \frac{db}{dt} = \frac{\Gamma}{2\pi C} \frac{\mathfrak{Tg}\, 2a}{\mathfrak{Cof}^2\, 2a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24a).$$

Wir haben in der Abb. 5 einige der Bahnkurven aufgezeichnet. Man erkennt, daß alle Bahnen, deren C-Werte < 1 sind, geschlossene Kurven sind, während die den Weiten $C < 1$ entsprechenden Bahnen ins Unendliche gehen und dort einen aus

$$\operatorname{tg}^2 2\, b_0 = C - 1$$

zu berechnenden Abstand von der Mittellinie $\mathfrak{z} = 0$ erreichen, der nur für die Grenzkurve $C = 1$ verschwindet. **Nur wenn also die beiden Wirbel innerhalb eines bestimmten, durch die Kurve $C = 1$ bezeichneten Gebietes im Flüssigkeitskanal liegen, werden sie auf geschlossenen Bahnen einander folgen, also einen endlichen Abstand voneinander behalten und an die Ausgangsstelle zurückkehren; außerhalb dieses Gebietes werden sie nach verschiedenen Seiten ins Unendliche abschwimmen mit einer Geschwindigkeit, die sich asymptotisch dem Grenzwerte**

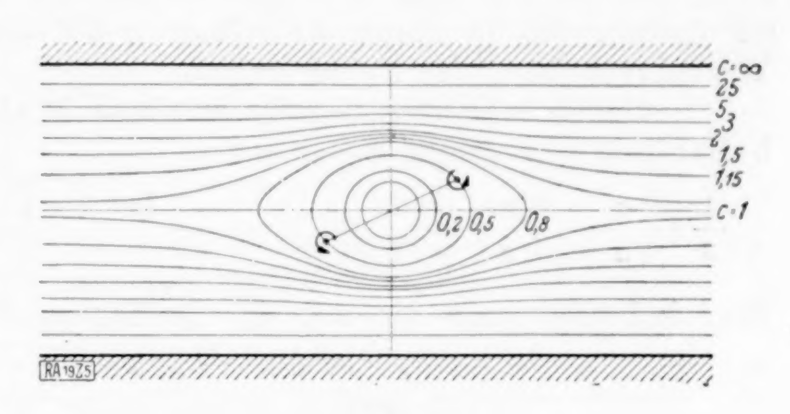


Abb. 5.

$$v_a = \frac{d a}{d t} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{tg} 2\, b_0 = -\frac{\Gamma}{2\pi} \sqrt{C - 1}$$

nähert. Allgemein ergibt sich für das Quadrat der Absolutgeschwindigkeit bei Benutzung von (25)

$$v^2 = \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 C} \left[(1 + C)^2 + 3\, \mathfrak{Tg}^4\, 2\, a - (3\, C + 4)\, \mathfrak{Tg}^2\, 2\, a\right]$$

$$= \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 C} \left[(1 - C)^2 + 3 \operatorname{tg}^4 2\, b - (3\, C - 4) \operatorname{tg}^2 2\, b\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26).$$

In den Scheitelpunkten der geschlossenen Bahnkurven hat die Geschwindigkeit einen größten und kleinsten Wert

$$(v_1)_{a=0} = \frac{\Gamma(1 + C)}{2\pi \sqrt{C}}, \qquad (v_2)_{b=0} = \frac{\Gamma(1 - C)}{2\pi \sqrt{C}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (27).$$

Die daraus resultierende mittlere Geschwindigkeit

$$v_m = \frac{\Gamma}{2\pi \sqrt{C}}$$

wächst also mit abnehmendem Abstand der Wirbel vom Anfangspunkt.

In dem vorliegenden Falle einer unendlich großen Rechtecksseite läßt sich auch die zweite Integration der Bewegungsgleichungen unschwer durchführen, d. h. die Abhängigkeit der Lage der Wirbel von der Zeit durch elementare trigonometrische Funktionen angeben. Eliminieren wir z. B. in dem Ausdruck für $\frac{d b}{d t}$ die Variable a durch Einführung des Parameters C der Bahnkurve, so erhält man mit $\operatorname{tg} 2\, b = u$

$$\frac{d b}{d t} = \frac{\Gamma}{2\pi C} \sqrt{C - u^2}\,(1 - C + u^2); \qquad d t = \frac{\pi C}{\Gamma} \frac{d u}{\sqrt{C - u^2}\,(1 + u^2)\,(1 - C + u^2)},$$

$$t = \frac{\pi}{\Gamma} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - C}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - C}\, \sqrt{C - u^2}}{z} - \frac{1}{\sqrt{1 + C}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{C - u^2}}{u \sqrt{1 + C}}\right]$$

$$= \frac{\pi}{\Gamma} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - C}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - C}\; \mathfrak{Tg}\, 2\, a}{\operatorname{tg} 2\, b} - \frac{1}{\sqrt{1 + C}} \operatorname{arctg} \frac{\mathfrak{Tg}\, 2\, a}{\sqrt{1 + C} \cdot \operatorname{tg} 2\, b}\right] \quad . \; . \quad (28).$$

Für die Zeit eines ganzen Umlaufs der Wirbel um ihren Schwerpunkt längs einer Bahnkurve $C < 1$ haben wir daher

$$T = \frac{2\pi^2}{\Gamma} \left[\frac{\sqrt{1 + C} - \sqrt{1 - C}}{\sqrt{1 - C^2}}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28\,\mathrm{a}).$$

Die Umlaufszeit ist also umgekehrt proportional der Wirbelstärke und um so kleiner, je geringer der mittlere Abstand des Wirbelpaares vom Schwerpunkt ausfällt.

7. Das Feld der Wirbelbahnen als Stromfeld. Die beiden betrachteten Fälle eines Wirbels und zweier gleichsinniger Wirbel im Rechteck, deren Schwerpunkt im Mittelpunkt liegt, geben noch zu einigen Bemerkungen Anlaß. Wenn man nämlich die Gesamtheit der berechneten Wirbelbahnen als Stromfeld deuten will, so muß es möglich sein, obwohl ein Geschwindigkeitspotential nicht mehr existieren kann, eine Stromfunktion zu finden, die in ihren Ableitungen die Geschwindigkeitskomponenten und zugleich die Wirbelverteilung im Felde liefert.

Gehen wir von dem Falle eines Wirbels aus, so ergibt die Wirbelstärke in einem beliebigen Feldpunkt $c = a + i b$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_c}{\partial a} - \frac{\partial v_a}{\partial b}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathfrak{v}_c = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{(p\,2a + \bar{p}\,2b)\,p''\,2a - p'^2\,2a + (p\,2a + \bar{p}\,2b)\,\bar{p}''\,2b - \bar{p}'^2\,2b}{(p\,2a + \bar{p}\,2b)^2}.$$

Berücksichtigt man die aus der Definition der p-Funktion resultierenden Gleichungen

$$p'^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3; \qquad p'' = 6p^2 - {}^1/_2\, g_2;$$
$$\bar{p}'^2 = 4\bar{p}^3 - g_2 \bar{p} + g_3; \qquad \bar{p}'' = 6\bar{p}^2 - {}^1/_2\, g_2,$$

so erhält man die bemerkenswerte Beziehung

$$w_c = {}^1/_2 \operatorname{rot} \mathfrak{v}_c = \frac{\Gamma}{2\pi}(p\,2a + \bar{p}\,2b) = \frac{\Gamma}{2\pi} F_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29).$$

Damit hat die früher mit C bezeichnete Bahnkonstante eine anschauliche Bedeutung erhalten, und es ergibt sich gleichzeitig, daß die Wirbelstärke längs einer Stromlinie (die zunächst als Wirbelbahnkurve eingeführt war) konstant ist. Ebenso läßt sich auch für den besonderen Fall zweier gleichsinniger Wirbel nachweisen, daß, wenn die linke Seite der Wirbelbahngleichung

$$\frac{p\,2a - e_2}{(p\,2a - e_2)(p\,2a - e_3)} + \frac{\bar{p}\,2b + e_2}{(\bar{p}\,2b + e_1)(\bar{p}\,2b + e_3)} = F_2$$

gesetzt wird, die Wirbelstärke die Form annimmt

$$w_c = {}^1/_2 \operatorname{rot} \mathfrak{v}_c = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot F_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29a).$$

Dieselben Gleichungen erhält man natürlich, wenn man von der Darstellung des Feldes durch Jakobische Funktionen ausgeht.

Die Stromfunktion Ψ, die die Aufeinanderfolge der Stromlinien charakterisiert, wird natürlich als Funktion der Form F darstellbar sein und kann im übrigen nach bekannten Grundsätzen aus den Beziehungen

$$v_a = \frac{\partial \Psi}{\partial b}; \qquad v_b = -\frac{\partial \Psi}{\partial a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

berechnet werden. Indem wir die beiden Fälle durch die Indizes 1 und 2 unterscheiden, erhalten wir also aus den Geschwindigkeitswerten

$$\left.\begin{aligned} \Psi_1 &= -\frac{\Gamma}{8\pi} \lg(p\,2a + \bar{p}\,2b) = -\frac{\Gamma}{8\pi} \lg F_1; \\ \Psi_2 &= -\frac{\Gamma}{8\pi} \lg\left[\frac{p\,2a - e_2}{(p\,2a - e_1)(p\,2a - e_3)} + \frac{\bar{p}\,2b + e_2}{(\bar{p}\,2b + e_1)(\bar{p}\,2b + e_3)}\right] = -\frac{\Gamma}{8\pi} \lg F_2 \end{aligned}\right\} \quad (31).$$

Berücksichtigt man ferner (29) und (30), so ergibt sich, daß die für die betrachteten Wirbelfelder charakteristischen Funktionen F und Ψ partikuläre Lösungen der partiellen Differentialgleichungen darstellen

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial b^2} = -\frac{\Gamma}{\pi} e^{-\frac{8\pi}{\Gamma}\Psi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32),$$

$$F\left(\frac{\partial^2 F}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial b^2}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial a}\right)^2 - \left(\frac{\partial F}{\partial b}\right)^2 = 2F^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33).$$

Uebrigens kann man auch im allgemeinen Fall, wie Herr Jaffé gezeigt hat und wie sich ohne weiteres aus unseren Gleichungen ergibt, eine, wenn auch nicht als Stromfunktion zu deutende logarithmische Funktion Ψ der Variabeln $a_1 \ldots a_n$, $b_1 \ldots b_n$ angeben, deren partielle Ableitungen mit den Komponenten der Bahngeschwindigkeiten der Wirbel übereinstimmen. In dem Falle zweier Gegenwirbel im Rechteck haben wir z. B.

$$\Psi = \frac{\Gamma}{8\pi} \lg \frac{[p(a_1 - a_2) + \bar{p}(b_1 - b_2)][p(a_1 + a_2) + \bar{p}(b_1 + b_2)]}{(p\,2\,a_1 + \bar{p}\,2\,b_1)(p\,2\,a_2 + \bar{p}\,2\,b_2)[p(a_1 + a_2) + \bar{p}(b_1 - b_2)][p(a_1 - a_2) + \bar{p}(b_1 + b_2)]},$$

$$\frac{d a_1}{d t} = \frac{\partial \Psi}{\partial b}, \quad \frac{d b_1}{d t} = -\frac{\partial \Psi}{\partial a_1}; \qquad \frac{d a_2}{d t} = -\frac{\partial \Psi}{\partial b_2}, \quad \frac{d b_2}{d t} = \frac{\partial \Psi}{\partial a_2}.$$

Schließlich mag hier noch Gelegenheit genommen werden, an den weiteren wesentlich schwieriger zu behandelnden Fall einer durch das gesamte Stromfeld im Rechteck konstant bleibenden Wirbelstärke zu erinnern. Die entsprechende ideale Strömung

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial b^2} = 2\,\omega$$

die der Differentialgleichung entspricht, entsteht bekanntlich dann, wenn das die Flüssigkeit enthaltende, prismatisch begrenzte Gefäß mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotiert und ist gleichbedeutend mit dem Torsionsfeld eines verdrehten zylindrischen Stabes mit dem gleichen rechteckigen Querschnitt. Die analytische Lösung, die von Saint-Vénant zum ersten Mal in Form von unendlichen Reihen gegeben wurde, läßt sich auch auf den Gebrauch von elliptischen Funktionen zurückführen, worauf wir aber hier nicht näher eingehen wollen.

8. Zwei gegensinnige Wirbel im Kanal mit einer gegen die Grenze schief gerichteten Verbindungslinie. Wenn die Lage der beiden Wirbel im Rechteck beliebig ist, so bietet die vollständige Durchführung der Rechnung so große Schwierigkeiten, daß wir uns vorläufig nur auf den besonderen Fall eines unendlich langen Rechtecks beschränken wollen, der bis zur Aufstellung der Wirbelbahnen (mittels elliptischer Integrale) erledigt werden kann.

Aus den allgemeinen Formeln (3) und (4) ergibt sich, wenn man $n = 2, \Gamma_1 = -\Gamma_2$ setzt, daß die Komponenten der Wirbelgeschwindigkeiten sich als partielle Ableitungen der Funktion

$$\Psi = \frac{\Gamma}{4\pi} \lg \frac{[\mathfrak{Cof}\,2(a_1 - a_2) - \cos 2(b_1 - b_2)][\cos 2(b_1 - b_2) - \cos 2(b_1 + b_2)]}{\mathfrak{Cof}\,2(a_1 - a_2) - \cos 2(b_1 + b_2)} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \lg F \qquad (34)$$

darstellen lassen

$$\frac{d a_1}{d t} = \frac{\partial \Psi}{\partial b_1}, \quad \frac{d b_1}{d t} = -\frac{\partial \Psi}{\partial a_1}; \qquad \frac{d a_2}{d t} = -\frac{\partial \Psi}{\partial b_2}, \quad \frac{d b_2}{d t} = \frac{\partial \Psi}{\partial a_2} \quad . \; . \; . \quad (35).$$

Für die relative Geschwindigkeit normal zur Grenze erhält man daraus

$$\frac{d(b_1 - b_2)}{d t} = 0, \qquad b_1 - b_2 = \text{konst.} = 2\,d_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (36).$$

Die Wirbel behalten also bei ihrer Bewegung den senkrecht zur Kanalgrenze gemessenen Abstand bei.

Dagegen wird für die andere Relativkoordinate $a_1 - a_2$

$$\frac{d(a_1 - a_2)}{d t} = \frac{\Gamma}{\pi} \sin 2(b_1 + b_2) \frac{\mathfrak{Cof}\,2(a_1 - a_2) - \cos 4\,d_0}{[\cos 4\,d_0 - \cos 2(b_1 + b_2)][\mathfrak{Cof}\,2(a_1 - a_2) - \cos 2(b_1 + b_2)]} \qquad (37).$$

Ebenso erhält man

$$\frac{d(b_1 + b_2)}{d t} = -\frac{\Gamma}{\pi} \mathfrak{Sin}\,2(a_1 - a_2) \frac{\cos 4\,d_0 - \cos 2(b_1 + b_2)}{[\mathfrak{Cof}\,2(a_1 - a_2) - \cos 2(b_1 + b_2)](\mathfrak{Cof}\,2(a_1 - a_2) - \cos 4\,d_0)} \qquad (38).$$

Die durch Elimination von t zu gewinnende Differentialgleichung

$$\frac{d(a_1 - a_2)}{d(b_1 + b_2)} = -\frac{\sin 2(b_1 + b_2)(\mathfrak{Cof}\,2(a_1 - a_2) - \cos 4\,d_0)^2}{\mathfrak{Sin}\,2(a_1 - a_2)[\cos 4\,d_0 - \cos 2(b_1 + b_2)]}$$

führt zu dem zweiten Integral

$$F = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,2(a_1 - a_2) - \cos 4\,d_0} + \frac{1}{\cos 4\,d_0 - \cos 2(b_1 + b_2)} = C \quad . \; . \; . \; . \quad (39).$$

Wenn wir $d_0 = 0$ setzen, wird $\frac{d(a_1 + a_2)}{d t} = 0$. Legt man also die y-Achse so, daß $a_1 = -a_2$ wird, so erhält man wieder die früher berechnete Bahn zweier Gegenwirbel, die von den Grenzen der Flüssigkeit gleichen Abstand haben.

Um die absoluten Bahnkurven der Wirbel, etwa des Wirbels zu bestimmen, gehen wir aus von den aus (35) zu gewinnenden Ausdrücken $\frac{d a_2}{d t}$ und $\frac{d b_2}{d t}$, die mit der Abkürzung

$$C = \frac{1}{\cos 4\,d^0 - \cos 4(b_1 + b_2)} = v$$

die Form annehmen

$$\frac{d a_1}{d t} = \frac{\Gamma}{2\pi}\left[\sin 4 d_0 \, 2 v - C) - \sin 4 (b_2 + d_0) \frac{(C-v)^2}{C}\right],$$

$$\frac{d b_1}{d t} = -\frac{\Gamma}{2 \pi C} v \sqrt{(1 + \cos 4 d_0 \cdot v)^2 - v^2}.$$

Daraus ergibt sich dann

$$d a_2 = -\frac{c \sin 4 d_0}{4}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{C - v}\right)\frac{d v}{\sqrt{R}} + \frac{d v}{4 v \sqrt{(1 + v \cdot \cos 4 d_0)^2 - v^2}},$$

wobei gesetzt ist

$$R = [(1 + \cos 4 d_0 \cdot v)^2 - v^2]\,[(C - v)^2 - (\cos 4 d_0 (C - v) - 1)^2].$$

Man erhält also

$$4 a_2 = C \sin 4 d_0 \int\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{C - v}\right)\frac{d v}{\sqrt{R}} - \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{1 + \cos 4 d_0 v}{v} \quad . \; . \; . \quad (40).$$

Um die Reduktion des elliptischen Integrals übersichtlich zu gestalten und bis zur Zahlenrechung auszuwerten, nehmen wir im besonderen an, daß $d_0 = \pi/8$, daß also der zur Grenze senkrechte Abstand der Wirbel der halben Kanalbreite gleich sei. Da in diesem Falle

$$\sin 4 b_2 = \frac{\mathfrak{Cof}\, 2 (a_1 - a_2)}{C\, \mathfrak{Cof}\, 2 (a_1 - a_2) - 1}; \quad \mathfrak{Cof}\, 2 (a_1 - a_2) = \frac{\sin 4 b_2}{C \sin 4 b_2 - 1}$$

wird, so muß $C > 1$ werden. Wenn $C = 2$ oder > 2 ist, so liegt $\sin 4 b_2$ zwischen den Grenzwerten $\frac{1}{C-1}$ mit $\mathfrak{Cof}\, 2 (a_1 - a_2) = 0$, also $a_1 = a_2$ und $1/C$ mit $a_1 - a_2 = \infty$. Wenn dagegen $C < 2$ und > 1 ist, so liegt $\sin 4 b_2$ zwischen den Werten $1/C$ und 1. Die Koordinate a_2 ist für $d_0 = \pi/8$ durch

$$4 a_2 = C \int\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{C - v}\right)\frac{d v}{\sqrt{(1 - v^2)\,[(v - C)^2 - 1]}} - \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{1}{v} \quad . \; . \; . \quad (40\,a)$$

darstellbar. Das Integral, das im allgemeinen elliptischer Natur ist, läßt sich in zwei besonderen Fällen in strenger Weise durch hyperbolische Umkehrfunktionen darstellen. Unter diesen Fällen ist besonders der singuläre Fall $C = 2$ bemerkenswert, bei dem sich, wie man sieht, aus dem Wurzelausdruck der Faktor $1 - v$ heraushebt. Man erhält dann

$$4 a_2 = 2 \int\left(\frac{1}{v \sqrt{3 + 2 v - v^2}} + \frac{1}{(2 - v)\sqrt{3 + 2 v - v^2}}\right) d v - \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{1}{v}.$$

Die Auswertung ergibt

$$4 a_2 = -\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{1}{v} - \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{v^2 - 2 v + 3}{2 v (2 - v)}$$

oder mit $\sin 4 b_2 = u$

$$4 a_2 = -\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{u}{2 u - 1} - \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{3 u^2 - 2 u + 1}{2 (2 u - 1)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (41).$$

Damit ist die Integrationskonstante gleich Null gesetzt, d. h. so bestimmt, daß die Querachse die Wirbel in der $a_1 - a_2 = 0$ entsprechenden Lage, d. h. an der Stelle ihres Vorübergangs miteinander verbindet. Setzt man $4 b_1' = 4 b_1 - \pi$, so wird $\sin 4 b_1' = \sin 4 b_2$; $\sin 4 b_1' = \cos 4 b_1$ und man hat damit für den Wirbel 1 die Bahngleichung

$$4 a_1 = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{u}{2 u - 1} - \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{3 u^2 - 2 u + 1}{2 (2 u - 1)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (41\,a).$$

Die entsprechenden Bahnkurven mit einigen zusammengehörigen Lagen der beiden Wirbel sind in der Abb. 7 dargestellt. Die Punkte $b = \pi/8$ und $3\,\pi/8$, $a = 0$ sind singuläre Punkte für die Bewegung, da die Wirbel hier ohne eine Gleichgewichtsstörung in Ruhe sind. Die Zweige der Bahnen, die in diesen Punkten zusammenhängen und übrigens hier Winkel von $\pi/4$ mit den Achsen einschließen, werden von den Wirbeln in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen.

Der weitere, durch elementare Funktionen darstellbare Fall ist durch $C = \sqrt{2}$ charakterisiert. Man erhält hier durch Vermittlung der Substitution

$$v = \frac{\sqrt{2} \cdot z}{1 + z}, \quad u = \frac{1 + z}{\sqrt{2}}, \quad 4 a_2 = -\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{u}{\sqrt{2} u - 1} + \sqrt{2}\int\left(\frac{1}{z} - z\right)\frac{d z}{\sqrt{(1 - z^2)^2 - 4 z^2}}$$

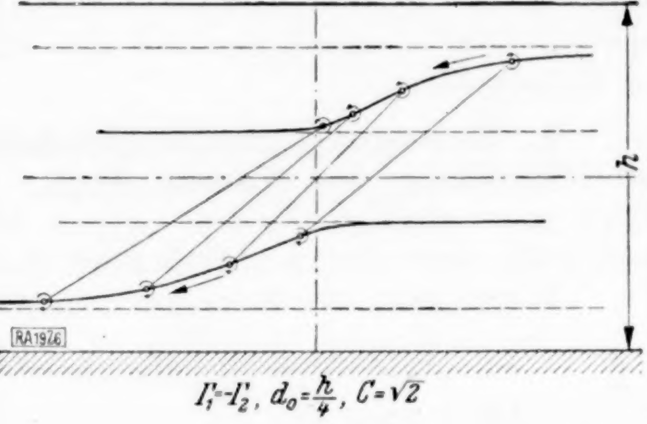
oder da das zweite Integral durch die Variable z^2 ausgedrückt werden kann

$$4a_2 = -\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{u}{\sqrt{2}\cdot u-1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{1-z^2}{2z}\right)^2.$$

$$4a_2 = -\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{u}{\sqrt{2}\cdot u-1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{u^2(\sqrt{2}-u)^2}{(\sqrt{2}\cdot u-1)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (42),$$

$$4a_1 = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{u}{\sqrt{2}\cdot u-1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{u^2(\sqrt{2}-u)^2}{(\sqrt{2}\cdot u-1)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (42a).$$

Die betreffenden Bahnkurven, die übrigens typisch sind für die Fälle $C \underset{>}{\leq} {}^{2}_{1}$, sind in der Abb. 6 dargestellt. Sie gehen, je mehr sich C der 1 nähert, um so mehr in zwei gerade parallele Linien über.



$\Gamma_1 = \Gamma_2$, $d_0 = \frac{h}{4}$, $C = \sqrt{2}$

Abb. 6.

Wenn C größer wird als 2, so kann man das auf der rechten Seite von (40) stehende Integral mit Hilfe der Substitution

$$v = \frac{1+\alpha y}{\alpha + y}$$

auf die Normalform bringen. Damit die ungeraden Potenzen von y im Wurzelausdruck verschwinden, ist für α der Wert

$$\alpha = \frac{C+\sqrt{C^2-4}}{2}$$

zu setzen. Führt man dann noch $\beta = \frac{1}{\alpha} = \frac{C-\sqrt{C^2-4}}{2}$ ein, so wird mit der Abkürzung $Y = (1-y^2)\left(1-\frac{1}{\alpha^4}y^2\right)$

$$C\int\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{C-v}\right)\frac{dv}{\sqrt{R}}\,C = \beta\sqrt{C^2-4}\int\left(-1+\frac{\beta}{y+\beta}+\frac{\alpha^3}{y+\alpha^3}\right)\frac{dy}{\sqrt{Y}}.$$

Mit wachsendem C konvergiert $\frac{1}{\alpha^4} = k^2$, das Quadrat des Moduls der elliptischen Integrale sehr schnell gegen Null. Wenn man daher $Y = 1 - y^2$ setzt, die ersten Glieder der Reihe

$$\frac{\alpha^3}{\alpha^3+y} = 1 - \frac{y}{\alpha^3} + \frac{y^2}{\alpha^6} - \ldots$$

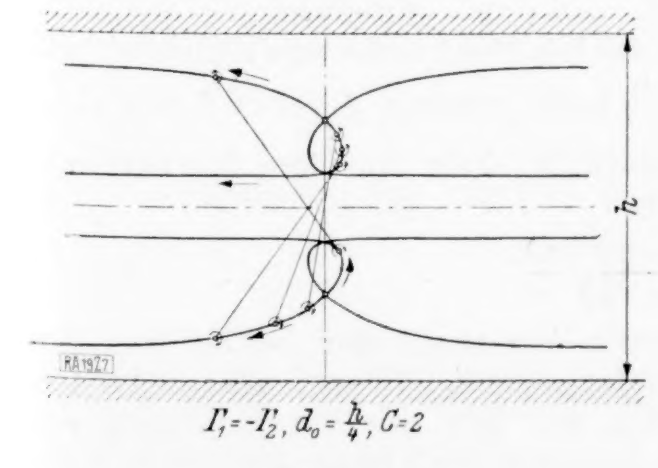
berücksichtigt und die Integralformeln benutzt

$$\int\frac{dy}{(y+\beta)\sqrt{1-y^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{1+\beta y}{y+\beta} = -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{u}{Cu-1}\,; \quad \int\frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}} = -\sqrt{1-y^2},$$

so erhält man für $4a_2$ und $4a_1$ die Näherungsausdrücke

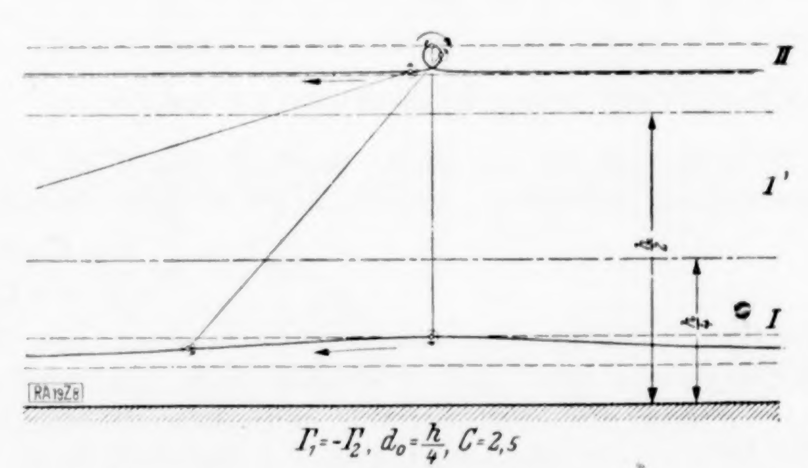
$$4a_2 = C\beta^4\sqrt{C^2-4}\cdot\sqrt{1-y^2} - \left(1+\frac{C\beta^2\sqrt{C^2-4}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{u}{Cu-1} \quad . \; . \quad (43),$$

$$4a_1 = C\beta^4\sqrt{C^2-4}\cdot\sqrt{1-y^2} + \left(1-\frac{C\beta^2\sqrt{C^2-4}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{u}{Cu-1} \quad . \; . \quad (43a).$$



$\Gamma_1 = -\Gamma_2$, $d_0 = \frac{h}{4}$, $C = 2$

Abb. 7.



$\Gamma_1 = -\Gamma_2$, $d_0 = \frac{h}{4}$, $C = 2{,}5$

Abb. 8.

In der Abb. 8 ist eine Darstellung des Falles $C = 2{,}5$ gegeben. Zusammenfassend kann der Unterschied der beiden Fälle $C \lesseqgtr 2$ folgendermaßen ausgesprochen werden. Wenn $C > 2$ ist, so bleiben die Bahnen der Wirbel, die eine konchoidenartige Gestalt haben, in zwei gleichbreiten Teilstreifen innerhalb der größeren, in der Abb. 8 mit I und II bezeichneten Streifen $4b = 0, \pi/2$; $4b = \pi, {}^3/_2\,\pi$ eingeschlossen Wenn dagegen $C < 2$ ist, so überschreiten die Wirbel die Grenzen $4b = \pi/2, {}^3/_2\,\pi$, so daß die zusammengehörigen Bahnen in den Gebieten I und I', resp. II und II' verlaufen, wobei die in I und II' ebenso die in I' und II liegenden Bahnzweige den gleichen Charakter haben. Die Verbindungslinie der Wirbel geht hier nicht durch die zur Grenze des Kanals senkrechte Lage hindurch; sie bildet daher während der Bewegung mit der x-Richtung entweder immer nur spitze oder immer nur stumpfe Winkel (vergl. Abb. 6). Im Falle $C > 2$ dagegen ist $a_1 - a_2$ während einer vollständigen Bewegung teilweise positiv und teilweise negativ. Die Verbindungslinie der Wirbel in der Lage $a_1 = a_2$ ist die Symmetrielinie des Bahnsystems.

9. Bewegung zweier gleichsinniger Wirbel, deren Schwerpunkt außerhalb der Mittellinie des Kanals liegt. Die Rechnungen für diesen Fall gestalten sich zunächst ganz analog wie im vorigen Abschnitt. Der kinematische Charakter ist aber so einzigartig, daß eine ausführlichere Behandlung gerechtfertigt erscheint.

Wenn man die komplexen Geschwindigkeitswerte beider Wirbel addiert, so kommt

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \frac{\Gamma}{2\pi}\left[\operatorname{ctg} 2b_1 + \operatorname{ctg} 2b_2 + \frac{2\sin 2(b_1+b_2)}{\operatorname{Cos} 2(a_1-a_2) - \cos 2(b_1+b_2)}\right].$$

Da also $\dfrac{d(b_1+b_2)}{dt} = 0$, $b_1 + b_2 = \text{konst}$, so sieht man, daß der Schwerpunkt der Wirbel während der Bewegung auf einer Parallelen zur Kanalgrenze fortschreitet.

Wenn man daher $b_1 + b_2 = 2s_0$ setzt und dann die Schwerpunktsbahn als Abszissenachse einführt, so ergibt sich

$$\frac{d(a_1+a_2)}{dt} = \frac{\Gamma}{\pi}\sin 4s_0\left[\frac{1}{\cos 4b_1 - \cos 4s_0} + \frac{1}{\operatorname{Cos} 2(a_1-a_2) - \cos 4s_0}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44),$$

$$\frac{d(a_1-a_2)}{dt} = -\frac{\Gamma}{\pi}\sin 4b_1\left[\frac{1}{\operatorname{Cos} 2(a_1-a_2) - \cos 4b_1} + \frac{1}{\cos 4b_1 - \cos 4s_0}\right] \quad . \quad . \quad . \quad (45),$$

$$\frac{d(b_1-b_2)}{dt} = \frac{2\,db_1}{dt} = \frac{\Gamma}{\pi}\operatorname{Sin} 2(a_1-a_2)\left[\frac{1}{\operatorname{Cos} 2(a_1-a_2) - \cos 4b_1} - \frac{1}{\operatorname{Cos} 2(a_1-a_2) - \cos 4s_0}\right] \quad (46).$$

Wenn man die letzten beiden Gleichungen durcheinander dividiert, so erhält man eine Beziehung, die zu dem einfachen Integral führt

$$F = \frac{1}{\cos 4b_1 - \cos 4s_0} - \frac{1}{\operatorname{Cos} 2(a_1-a_2) - \cos 4s_0} = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47).$$

Das ist nichts anderes wie die Gleichung des Wirbels relativ zum Schwerpunkt. Gleichzeitig ergibt der mit $-\dfrac{\Gamma}{4\pi}$ multiplizierte Logarithmus der Funktion F die Funktion Ψ, deren partielle Ableitungen mit den Geschwindigkeitswerten beider Wirbel übereinstimmen.

Es zeigt sich nun, daß, wenn die Größe $\dfrac{C}{1 + C\cos 4s_0} < 1$ also $C < \dfrac{1}{2\sin^2 2s_0}$ ist, die beiden Wirbel den Schwerpunkt umkreisen und einen endlichen Abstand von ihm behalten, während sie sich im Falle $C > \dfrac{1}{2\sin^2 2s_0}$ voneinander ins Unendliche entfernen und dann gleichzeitig der Schwerpunktsbahn asymptotisch in einem durch $\cos 4b_1 = \dfrac{1 + C\cos 4s_0}{C}$ bestimmten Abstand parallel laufen. Im ersten Falle verläuft die Wirbelbahn innerhalb eines von dem Schwerpunkt halbierten Streifens, dessen begrenzende Geraden durch

$$\cos 4b_1 = \frac{1 + C\cos 4s_0(1-\cos 4s_0)}{1 + C(1-\cos 4s_0)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

bestimmt sind. Im zweiten Falle liegt die Wirbelbahn innerhalb der beiden von den Asymptoten und den Geraden (48) begrenzten Streifengebiete. (Vergl Abb. 9 bis 12).

Bei der Bestimmung der Absolutbahnen werden wir uns zur Vereinfachung der Rechnung auf den Fall $s_0 = \pi/8$ beschränken. Dann geht die Gleichung der Relativbahn über in

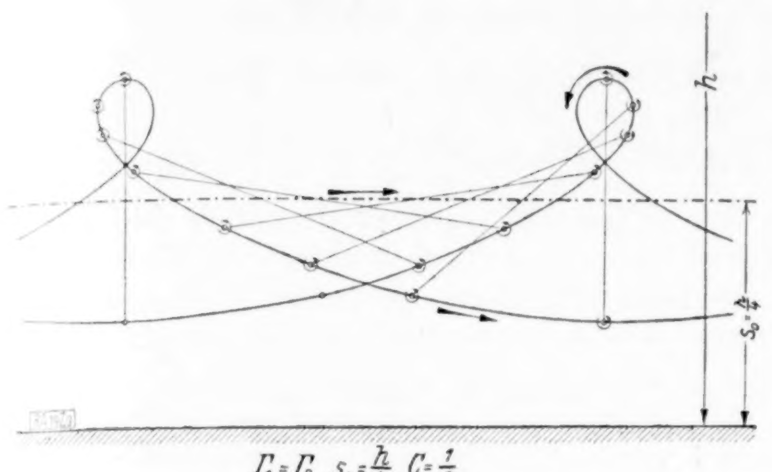


Abb. 9.

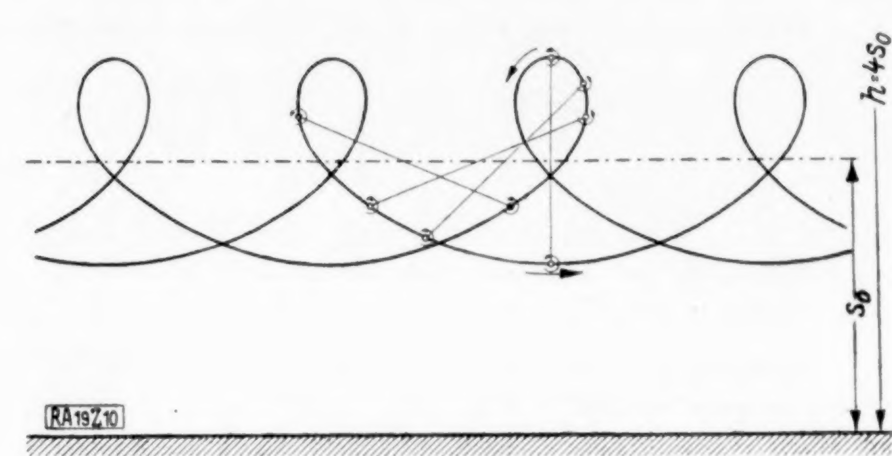


Abb. 10.

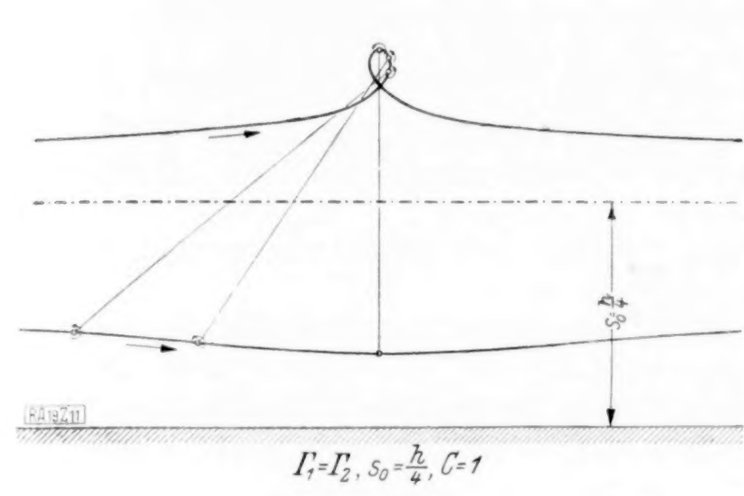


Abb. 11.

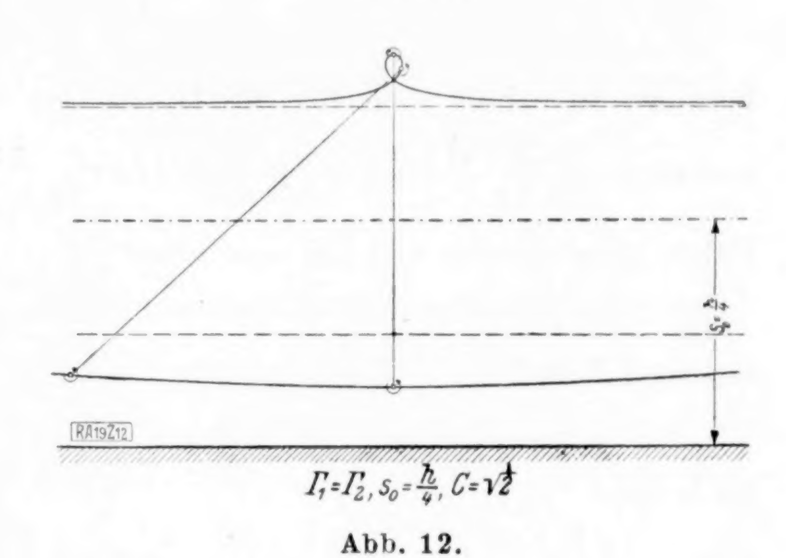


Abb. 12.

$$\frac{1}{\cos 4 b_1} - \frac{1}{\mathfrak{Cof}\, 2 (a_1 - a_2)} = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49).$$

Ferner hat man bei Benutzung dieser Gleichung für die Geschwindigkeiten $\frac{d a_1}{d t}$ und $\frac{d b_1}{d t}$ die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} \frac{d a_1}{d t} &= \frac{\Gamma}{2\pi}\left[\frac{2 - C \cos 4 b_1}{\cos 4 b_1} - \frac{\sin 4 b_1}{C \cos^2 4 b_1}\right]; \\ \frac{d b_1}{d t} &= \frac{\Gamma}{2 \pi C} \frac{1 - C \cos 4 b_1}{\cos^2 4 b_1} \sqrt{\cos^2 4 b_1 - (1 - C \cos 4 b_1)^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (50).$$

Daraus ergibt sich dann durch Elimination von t und Einführung von

$$v = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\, 2 (a_1 - a_2)} = \frac{1}{\cos 4 b_1} - C$$

die Integralform der absoluten Wirbelbahn

$$4 a_1 = C \int \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v + C}\right) \frac{d v}{\sqrt{(1 - v^2)[(v + C)^2 - 1]}} + \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{1}{v} = J + \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{1}{v} \quad (51).$$

Bei der Normierung des elliptischen Integrals sind die beiden Fälle $C \lesseqgtr 2$ zu unterscheiden, während der singuläre Fall $C = 2$ wieder eine einfachere Behandlung zuläßt.

Wenn wir zunächst $C < 2$ annehmen, so führt die lineare Transformation

$$v = \frac{r + s z}{1 - z} \text{ mit } r = {}^1/_2 (\sqrt{4 - C^2} - C); \quad s = {}^1/_2 (\sqrt{4 - C^2} + C)$$

zum Verschwinden der ungeraden Potenzen des Wurzelausdrucks, und zwar wird

$$C \int \frac{d v}{\sqrt{R}} = 2 \int \frac{d z}{\sqrt{(1 - \alpha^2 z^2)\left(1 - \frac{1}{\alpha^2} z^2\right)}},$$

wenn $\alpha = \frac{2 + \sqrt{4 - C^2}}{C} = \frac{1 + s}{1 - r}$ gesetzt wird. Ferner ist

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{v + C} = \frac{r + s}{r s}\left[-1 + \frac{s}{r z + s} + \frac{r}{s z + r}\right].$$

Wenn man also $\alpha z = y$, $(1-y^2)(1-\beta^4 y^2) = Y$, $1/\alpha = \beta$ setzt, so erhält man

$$J = 2(r+s)\left[-\frac{\beta}{rs}\int\frac{dy}{\sqrt{Y}} + \frac{1}{r^2}\int\frac{dy}{\left(y+\frac{s\alpha}{r}\right)\sqrt{Y}} + \frac{1}{s^2}\int\frac{dy}{\left(y+\frac{r\alpha}{s}\right)\sqrt{Y}}\right].$$

Man sieht nun, daß der Modul $k = 1/\alpha^2$ der elliptischen Integrale um so kleiner ausfällt, je kleiner die Konstante C wird. In der nebenstehenden Zahlentafel sind die Größenverhältnisse für die Zahlen $C = 1;\ 0{,}5;\ 0{,}2$ zum Ausdruck gebracht. Wenn man daher, ohne einen wesentlichen Fehler zu begehen, $k^2 = \frac{1}{\alpha^4} = 0$ setzt, ferner auch $\frac{r^2}{s^2\alpha^2}$ und $\frac{s^2}{r^2\alpha^2}$ gegen 1 vernachlässigt und die Integralformel

C	α	β	k
1	3,73	0,27	0,073
0,5	7,87	0,127	0,016
0.2	19,95	0,05	25.10^{-4}

$$\int\frac{ds}{(y+r)\sqrt{1-y^2}} = -\frac{1}{\sqrt{r^2-1}}\arccos\frac{1+yr}{y+r} \quad (r^2 > 1)$$

benutzt, so erhält man für die Gleichung der absoluten Bahnkurve die Näherungsformel

$$4a_1 = \frac{2\beta(r+s)}{rs}\left[\arccos y - \arccos\frac{r+ys\alpha}{ry+s\alpha} - \arccos\frac{s+yr\alpha}{sy-r\alpha}\right] + \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\cos 4b_1}{1-C\cos 4b_1}.$$

Führt man wieder $\cos 4b_1 = u$, also

$$z = \frac{1}{\alpha}y = \frac{1-us}{1+ur}$$

ein und benutzt die Beziehungen

$$s-r = C, \qquad r^2+s^2 = 2, \qquad rs = 1-\frac{1}{2}C^2, \qquad (1-r)(1+s) = \frac{C}{2}(C+2),$$

so kommt

$$4a_1 = \frac{2\beta(r+s)}{rs}\left[\arccos\alpha\frac{1-us}{1+ur} - \arccos\frac{C+2-2u(C-1)}{C} - \arccos\frac{2-C-u(2-C^2)}{C(1-Cu)}\right]$$
$$+ \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{u}{1-Cu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (51\,\mathrm{a}).$$

Der Fall $C = 1$ bietet insofern eine Besonderheit, als der dritte Ausdruck wegen $\frac{r\alpha}{s} = 1$ ungültig wird. Man erhält hier

$$4a_1 = 4(2\sqrt{3}-3)\left[\arccos(2+\sqrt{3})\frac{2-u(\sqrt{3}+1)}{2+u(\sqrt{3}-1)} - \arccos(3-4u) - \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{\frac{2u-1}{1-u}}\right]$$
$$+ \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{u}{1-u} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (52).$$

Der Ausdruck für $4a_2$ unterscheidet sich in jedem Falle von dem für $4a_1$ durch das Vorzeichen des letzten Gliedes. Für die Werte $C = \sqrt{2}$ und $C = 2$ ist das Integral ohne Vernachlässigung durch hyperbolische Funktionen zu lösen. Man erhält in ganz ähnlicher Weise wie im Falle zweier Gegenwirbel

$$\text{für } C = \sqrt{2} \qquad 4a_1 = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{u}{1-\sqrt{2}\cdot u} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{u^2(\sqrt{2}-u)^2}{(1-\sqrt{2}u} \quad \ldots \quad (53),$$

$$C = 2 \qquad 4a_1 = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{u}{1-2u} - \frac{2}{\sqrt{3}}\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{3u^2-2u+1}{2(1-2u)} \quad \ldots \quad (54).$$

Wenn schließlich $C > 2$ ist, so wird die Reduktion des Integrals auf die Normalform durch die Substitution

$$v = \frac{y\alpha-1}{\alpha-y} \quad \text{resp.} \quad u = \frac{\alpha(y-\alpha)}{y-\alpha^3}$$

geleistet, wenn wieder wie im vorigen Abschnitt $\alpha = \frac{C+\sqrt{C^2-4}}{2}$, also $\beta = \frac{1}{\alpha} = \frac{C-\sqrt{C^2-4}}{2}$ gesetzt wird. Man erhält dann

$$J = C\beta\sqrt{C^2-4}\left[\int\frac{dy}{\sqrt{Y}} + \beta\int\frac{dy}{(y-\beta)\sqrt{Y}} - \alpha_3\int\frac{dy}{(\alpha^3-y)\sqrt{Y}}\right]$$

Wie oben bei abnehmendem C, so konvergiert hier bei wachsendem C der Modul $k = \frac{1}{a^2}$ der elliptischen Integrale verhältnismäßig schnell gegen Null. Man erhält daher angenähert wegen $\frac{1-\beta y}{y-\beta} = \frac{u}{1-Cu}$ ähnlich wie oben

$$4 a_1 = \left(\frac{1 - C\beta^2 \sqrt{C^2-4}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \operatorname{Ar\,Cof} \frac{u}{1-Cu} C + \beta^4 \sqrt{C^2-4} \cdot \sqrt{1-y^2} \quad . \quad . \quad . \quad (55).$$

Die Gesamtbewegung der beiden gleichdrehenden Wirbel setzt sich aus zwei Teilbewegungen zusammen, die wir bereits als ein Fortschreiten des Schwerpunktes mit periodisch sich ändernder Geschwindigkeit und eine Umkreisung des Schwerpunkts erkannt haben. Wenn $C < 1$ ist, so verfolgen die Wirbel einander auf periodisch angeordneten trochoidenartigen Kurven, deren Schleifen im Inneren des Kanals zugewendet sind. Die Periode ist um so kleiner, je größer das Verhältnis der Umfangs- zur Schwerpunktsgeschwindigkeit, d. h. je geringer der Abstand der Wirbel ist im Verhältnis zur Breite des Kanals (vergl. Abb. 13).

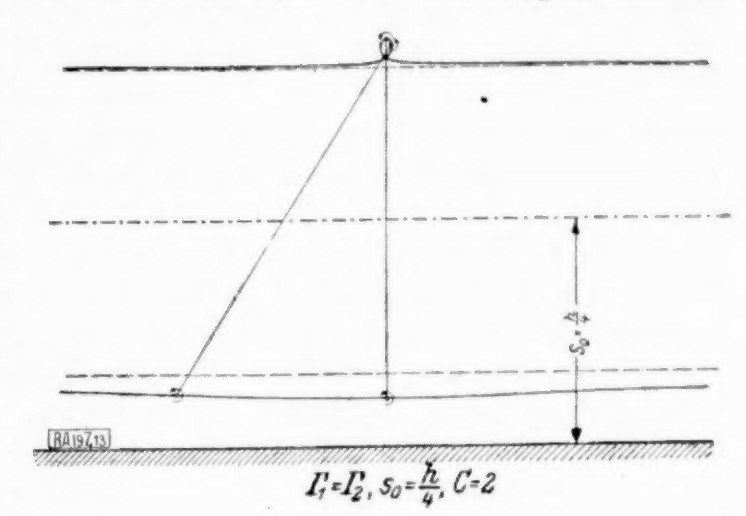


Abb. 13.

Im Grenzfall eines unendlich kleinen Abstandes der Wirbel ist die Geschwindigkeit des Fortschreitens unendlich klein gegenüber der der Umkreisung. Dann gehen die Gl. (50) über in

$$\frac{da_1}{dt} = -\frac{\Gamma}{\pi} \frac{2 b_1}{8 \varrho^2}; \quad \frac{db_1}{dt} = \frac{\Gamma}{\pi} \frac{\sqrt{\varrho^2 - b_1^2}}{4 \varrho^2},$$

wenn $C = 8 \varrho^2$ gesetzt wird. Daraus ergibt sich aber die Differentialgleichung

$$\frac{da_1}{db_1} = -\frac{b_1}{\sqrt{\varrho^2 - b_1^2}}$$

mit der Lösung

$$a_1^2 + b_1^2 = \varrho^2.$$

Die Wirbel bewegen sich also bei kleinem Abstand angenähert auf einer Kreisbahn um den Schwerpunkt.

Im Falle $C > 1$ ist die Bewegung insofern eine ganz andere, als die Wirbel nicht ihre Stellungen zu beiden Seiten der Schwerpunktsbahn wechseln, sondern auf derselben Seite bleiben. Der weiter nach innen gelegene Wirbel beschreibt zwar noch eine (kleine) Schleife, während der andere Wirbel an ihm vorbeischwimmt; aber nachdem sie sich von einander entfernt haben, vergrößert sich der Abstand mehr und mehr ins Unendliche, während die Abstände von der Schwerpunktsbahn asymptotisch einem Grenzwerte zustreben, der im Falle $C = 1$ verschwindet. Die Bahnen zeigen einen konchoidenartigen Verlauf; mit wachsendem C verschmälern sich die Streifen, in denen die Bewegung der Wirbel eingeschlossen bleibt, bis für $C = \infty$ die Bahnkurven in zwei Geraden $b = \pm \pi/8$ übergehen. Das geht aus der Form der Gleichung hervor. Setzt man zunächst $u = \frac{1}{C+1}$ in die Gleichung $\frac{da_1}{dt} = 0$ ein, so erhält man

$$C(C+2) = (C+1)^2,$$

die nur für $C = \infty$ erfüllt ist. Daraus geht hervor, daß erst für ein unendlich großes C die Schleife verschwindet. Da ferner $\frac{C\beta^2\sqrt{C^2-4}}{\sqrt{1-\beta^2}}$ für wachsende C der 1 zustrebt, so haben wir in diesem Falle die Bahngleichung

$$\operatorname{Cof} \frac{4a}{s} = \frac{u}{1-Cu}.$$

Für $C = \infty$ wird also $1 - Cu = 0$, $u = \cos 4b_1 = \frac{1}{C} = 0$ oder $4b_1 = \pi/2$. Die Grenzbahnen beider Wirbel sind also durch die Parallelen $b_1 = \pm \pi/8$ dargestellt. 19

Die Berücksichtigung der thermischen Trägheit des Meßdrahtes bei Messungen mittels Hitzdrahtmethode und die Ermittlung der Wärmeübergangszahl bei nicht stationärem Temperaturzustand.

Von FRANZ ÉLIÁS in Berlin.

Zur Bestimmung der Geschwindigkeit strömender Luft wird in besonderen Fällen die Messung mittels Hitzdrahtmethode verwendet. Sie ist eine indirekte Meßmethode und beruht auf der Tatsache, daß ein elektrisch geheizter Draht in einen Luftstrom konstanter Temperatur gestellt in Abhängigkeit von dessen Geschwindigkeit eine Temperaturänderung und somit auch eine Aenderung seines elektrischen Widerstandes erfährt.

Zur Messung wird aus bekannten Gründen ein dünner Platindraht verwendet. Gemessen oder registriert wird der jeweilige elektrische Widerstand bzw. die dadurch bedingte Stromstärke des Hitzdrahtes. Die zugehörigen Geschwindigkeiten ergeben sich aus einer Eichung, welche die Abhängigkeit des elektrischen Widerstandes des Drahtes bzw. die dadurch bedingte Stromstärke, von der Luftgeschwindigkeit festlegt, wobei die Luftgeschwindigkeit mittels Staudruckmesser unter beliebigen Verhältnissen bestimmt wird.

Die Hitzdrahtmethode verwendet man, wenn es sich darum handelt, erstens durch kleine Abmessungen des Meßinstrumentes möglichst wenig Störung im Luftstrom zu verursachen, zweitens wenn rasche Einstellzeit der Meßeinrichtung erforderlich ist. Im letzteren Fall kommt lediglich die registrierende Meßmethode mittels Oszillograph oder Fadengalvanometer in Frage.

Bei Bestimmung der Luftgeschwindigkeit mit Hilfe eines Staudruckmessers, dessen Staurohr aus vorerwähntem Grunde von dünnem Querschnitt ist, kann die Forderung der raschen Einstellzeit nicht erreicht werden, da die Einstellzeit für die Meßflüssigkeit im Gefäß entsprechend auf dem Staurohr ausgeübtem Drucke mehrere — auch 5 bis 10 Minuten in Anspruch nimmt. Die beiden vorerwähnten Forderungen, geringe Ausmaße, um möglichst wenig Störung zu verursachen und rasche Einstellzeit der Meßvorrichtung bei rasch verlaufenden Geschwindigkeitsschwankungen, sind daher mit Hilfe des Staudruckmessers nicht gleichzeitig zu erreichen.

Bei Messungen mit dem Hitzdraht kommen — wie später gezeigt wird — Einstellzeiten von mehreren Minuten nicht in Frage. Hier spielt wegen der Temperaturänderungen des Drahtes durch einen Luftstrom wechselnder Geschwindigkeit lediglich die thermische Trägheit des Drahtes eine Rolle. Sie muß berücksichtigt werden, wenn die Dauer der Geschwindigkeitsschwankungen oder der Messungen nicht groß ist gegenüber der Zeit, die erforderlich ist, durch den Draht der jeweiligen Luftgeschwindigkeit entsprechende Endtemperatur mit hinreichender Genauigkeit anzunähern.

Im folgenden ist ein Verfahren angegeben, welches gestattet, den Meßfehler zu berücksichtigen, der dadurch entsteht, daß die Meßzeit oder die Dauer der Geschwindigkeitsschwankungen nicht groß genug ist gegenüber der Zeitkonstante des Hitzdrahtes und aus der Differenz zweier beliebiger aufgenommenen oder registrierten Temperaturwerte die gesuchte Endtemperatur des Drahtes, die der betreffenden Luftgeschwindigkeit entspricht, genau zu ermitteln. Es liegt im Wesen des Verfahrens, daß dabei gleichzeitig der genaue Wert der Wärmeübergangszahl zwischen Meßdraht und strömender Luft sich ergibt, die vorerst nur annäherungsweise bekannt sein muß.

Die Betrachtung ist aus der Newtonschen Differentialgleichung, welche die Erwärmung und Abkühlung eines homogenen Körpers — in diesem Falle des Hitzdrahtes — behandelt, abgeleitet und schreiben dafür:

$$W \cdot dt = c \cdot G \cdot d\,T + \alpha\, A \cdot T \cdot dt \quad \ldots \ldots \quad (1).$$

In dieser Gleichung bedeutet:

t die Zeit (sec),

W die in der Zeiteinheit (sec) im Hitzdraht erzeugte Wärmemenge (Watt),

c die spezifische Wärme des Drahtmaterials $\left(\frac{\text{Watt sec}}{\text{kg }^0\text{C}}\right)$,

G das Gewicht des Drahtes (kg),
T die Drahttemperatur [°C],
α die Wärmeübergangszahl zwischen Draht und strömende Luft bei einer bestimmten Geschwindigkeit $\left(\frac{\text{Watt}}{\text{m}^2\ {}^0\text{C}}\right)$,
A die luftbespülte Oberfläche des Drahtes (m²).

Diese Differentialgleichung ergibt unter Berücksichtigung der beiden Grenzbedingungen:

$$\text{für } t = 0, \quad T = T_a \quad \ldots \ldots \quad (2),$$

$$\text{für } t = \infty, \quad T = T_e \quad \ldots \ldots \quad (3),$$

die Lösung:

$$T = T_e\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + T_a\, e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \ldots \ldots \quad (4),$$

$e = 2{,}718$ Basis der natürlichen Logarithmen.

Außerdem ergibt die Differentialgleichung (1) aus Bedingung (3), da für $t = \infty$, $c \cdot G \cdot dt = 0$ wird

$$T_e = \frac{W}{\alpha A} \quad \ldots \ldots \quad (5).$$

Die Bedeutung von T_a und T_e geht aus den beiden Bedingungen (2) und (3) hervor und es ist für einen beliebigen Zeitabschnitt:

T_a die Anfangstemperatur (°C),
T_e die Endtemperatur (°C) und
$\tau = \frac{c \cdot G}{\alpha A}$ die thermische Zeitkonstante des Drahtes (sec).

Da, wie schon angedeutet, bei der Betrachtung lediglich Temperaturdifferenzen zwischen zwei Zeitpunkten in Frage kommen, kann man in Gl. (3) sinngemäß, wenn während der Messung lediglich Erwärmung des Drahtes eintritt, $T_a = 0$, und wenn während der Messung lediglich Abkühlung des Drahtes erfolgt, $T_e = 0$ setzen, d. h. den Nullpunkt der Temperaturskala an T_a bzw. T_e legen. Dann ergeben sich die beiden vereinfachten Gleichungen (Abb. 1):

$$\text{für Erwärmung} \quad T = T_e\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad \ldots \ldots \quad (4\text{a})$$

$$\text{und für Abkühlung} \quad T = T_a \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \ldots \ldots \quad (4\text{b}).$$

In je zwei der drei Gl. (4a) bzw. (4b) und (5) haben wir nun die Möglichkeit, die gestellte Aufgabe zu beantworten und aus der Messung zweier beliebiger Punkte einer Erwärmungs- — (4a) und (5) — bzw. einer Abkühlungskurve — (4b) und (5) — des Meßdrahtes die zugehörige Endtemperatur T_e, also auch die tatsächliche Geschwindigkeit der Luftströmung und gleichzeitig den genauen, vorerst nur annäherungsweise angenommenen Wert der Wärmeübergangszahl zwischen Meßdraht und Luft zu ermitteln.

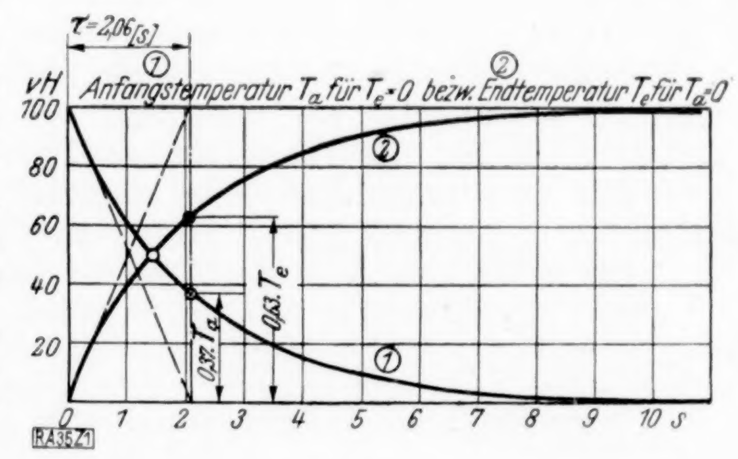


Abb. 1.

Zur Berechnung der beiden Unbekannten T_e und α haben wir die beiden Gleichungen:

$$T_e = \frac{W}{\alpha A} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

und

$$T_e = \frac{T}{1 - e^{-\frac{\alpha \cdot A}{c \cdot G} \cdot t}} \quad \ldots \ldots \quad (4\text{a}),$$

wenn während der Messung lediglich Erwärmung des Drahtes auftritt, bzw.

$$T_a = \frac{T}{e^{-\frac{\alpha \cdot A}{c \cdot G} \cdot t}} \quad \ldots \ldots \quad (4\text{b}),$$

wenn während der Messung lediglich Abkühlung des Drahtes erfolgt.

T_e bzw. T_a und α lassen sich, wie unten angegeben, bestimmen, und man kann dabei von einem beliebigen Temperaturzustand des Drahtes ausgehen. Es müssen nur für die Dauer einer Messung die dem Hitzdraht zugeführte Wärme und die Luftströmung konstant bleiben; dann gestaltet sich der Gang des Verfahrens folgendermaßen: Man notiert die Zeitdauer t einer Messung oder ermittelt die Zeitdauer einer Geschwindigkeitsschwankung aus dem Oszillogramm und die am Anfang und Ende dieser gemessenen Temperaturen. Die Differenz dieser ergibt den Wert T in Gl. (4a) bzw. (4b) unmittelbar, da im ersten Fall T_a und im zweiten T_e Null gesetzt wird.

Zur Berechnung der Zeitkonstante ermittelt man die Wärmekapazität $c \cdot G$ des Hitzdrahtes und dessen luftbespülte Oberfläche A und wählt sich noch aus vorhandenen Tabellen einen annähernden Wert für die Wärmeübergangszahl α.

Mit den so gefundenen Größen rechnet man sinngemäß die beiden Gl (4a) und (5) oder (4b) und (5) aus, je nachdem ob Erwärmung oder Abkühlung des Meßdrahtes erfolgte.

Man erhält nun mit Hilfe je zweier der beiden Gl. (4a) und (5) oder (4b) und (5) für T_e allgemein voneinander verschiedene Werte, da der angenäherte, vorerst aus Tabellen entnommene Wert für α den vorhandenen Verhältnissen nicht genau entsprechen wird. Man muß jetzt α solange korrigieren, bis die beiden Gl. (4a) und (5) oder (4b) und (5) gleiche Werte für T_e liefern. Der Wert von α, der diesen Bedingungen genügt, ist der richtige Wert der Wärmeübergangszahl und das so gefundene T_e die gesuchte Endtemperatur des Drahtes im stationären Temperaturzustand. Aus diesem Temperaturwert läßt sich der gesuchte Widerstand des Hitzdrahtes und mithin auch die gesuchte Luftgeschwindigkeit, wie bereits angedeutet, leicht ermitteln.

Man kann den Berechnungsgang noch vereinfachen, indem man aus den Gl. (4a) und (5) schreibt:

$$\alpha = \frac{W}{T \cdot A}\left(1 - e^{-\frac{\alpha \cdot A}{c \cdot G} \cdot t}\right) \qquad (6)$$

und entsprechend aus den Gl. (4b) und (5)

$$\alpha = \frac{W}{T \cdot A}\left(e^{-\frac{\alpha \cdot A}{c \cdot G} \cdot t}\right) \qquad (6a).$$

Man muß jetzt nur in der rechten Seite der Gl. (6) oder (6a) das vorerst annäherungsweise gewählte α so lange korrigieren, bis die entsprechende Gleichung erfüllt wird. Die Endtemperaturen erhält man aus Gl. (5) unmittelbar. Man geht dabei zweckmäßig in der Weise vor, daß man mit dem zuerst gewählten $\alpha_{(1)}$ Gl. (6) bezw. (6a) ausrechnet. Hierdurch erhält man einen neuen Wert für α, den wir mit $\alpha_{(2)}$ bezeichnen und wiederum in die Gl. (6) oder (6a) einsetzen wollen. Wie eine mathematische Untersuchung der Gl. (6) bezw. (6a) zeigt, ist nun $\alpha_{(2)}$ ein besserer Näherungswert als $\alpha_{(1)}$. Diese Annäherung setzt man schrittweise so lange fort, bis sich zwei aufeinanderfolgende Werte $\alpha_{(n)}$ und $\alpha_{(n+1)}$ je nach den Anforderungen genügend wenig voneinander unterscheiden.

Um die Verhältnisse auch quantitativ zu beleuchten, betrachten wir einen Platinhitzdraht und nehmen dessen Länge zu 10 mm und dessen Durchmesser zu 0,1 mm an.

Die Zeitkonstante dieses Drahtes ist:

$$\tau = \frac{c\,\gamma\,V}{\alpha\,A} = 2{,}06\ (\text{sec}),$$

c spezifische Wärme von Platin 134 $\left(\frac{\text{Watt sec}}{\text{kg}\ {}^0\text{C}}\right)$,

γ spezifisches Gewicht von Platin $\frac{21{,}5}{10^6}\left(\frac{\text{kg}}{\text{mm}^3}\right)$,

α Wärmeübergangszahl an Luft

bei 10 m je sec Strömungsgeschwindigkeit $\frac{35}{10^6}\left(\frac{\text{Watt}}{{}^0\text{C mm}^2}\right)$,

V das Volumen des Hitzdrahtes $\frac{\pi}{40}$ (mm³),

A die luftbespülte Oberfläche π (mm²).

Ist die Meßzeit dem Wert der Zeitkonstante gleich, so wird der Hitzdraht während dieser Zeit eine Temperatur annehmen, die von dem gesuchten Endwert noch um 37 vH sich unterscheidet, denn aus den Gl. (4a) bezw. (4b) · $t = \tau$ gesetzt, folgt:

$$T = T_e(1 - e^{-1}) = 0{,}63\ T_e \quad \text{und} \quad T = T_a\,e^{-1} = 0{,}37\ T_a. \quad \text{Vergl. Abb. 1.}$$

Die Meßzeiten müssen also erheblich größer sein, als der Wert der Zeitkonstante, um die gesuchten Endtemperaturen mit hinreichender Genauigkeit anzunähern.

Ueber die Meßzeiten, die erforderlich sind, um bestimmte Genauigkeiten zu erreichen, gibt nachfolgende Zahlentafel Uebersicht.

Es bedeutet p (vH) die erreichbare Meßgenauigkeit in Prozenten der Endtemperatur und t/τ das Verhältnis der hierzu erforderlichen Zeit zur Zeitkonstante.

p (vH)	t/τ	p (vH)	t/τ
100	∞	96	3,23
99	4,62	95	3,0
98	3,92	90	2,31
97	3,52	63	1,0

35

Wirbelbahnen um Wände und Platten von unendlich kleiner Wandstärke.

Von W. BARTH in Völklingen a. d. Saar.

Die Bewegungen von Wirbeln sind schon öfters der Gegenstand theoretischer Untersuchungen gewesen [1]). Wenn auch in vielen Fällen für Wirbelprobleme Lösungen gefunden werden konnten, so gibt es doch noch eine Reihe von Wirbelströmungen, die nicht voll geklärt sind. Dies ist vor allem dann der Fall, wenn es sich um Strömungen um irgend welche Profile handelt, die mit Hilfe der konformen Abbildung bestimmt worden sind. Die zwei einfachsten Fälle dieser Art sind die Wirbelströmungen um eine ebene Platte und um eine im Endlichen begrenzte bis ins Unendliche reichende ebene Wand von unendlich kleiner Wandstärke. Die Wirbelbahnen werden bei der konformen Abbildung nicht mit abgebildet, und die ganzen Verhältnisse ändern sich grundlegend. Diese Tatsache wird häufig nicht beachtet, und man findet daher in der Literatur zum Teil unrichtige Annahmen. Dies gilt auch für die beiden obengenannten Fälle insofern, als die Angabe, daß ein Wirbel sich um eine ebene Platte auf der Bahn einer Ellipse und um die begrenzte Wand auf einer Parabel bewegt, nicht zutrifft. Die sich nach der Theorie ergebenden Bahnen sind ganz anderer Natur, und wir stellen uns die Aufgabe, im folgenden die Wirbelbahnen für diese beiden Fälle zu bestimmen.

Die Grundlagen über die Bewegung von Wirbeln wurden bereits von Helmholtz und Kirchhoff aufgestellt. Ueber die Bewegung eines Wirbels kann man die Annahme machen, daß sich der Wirbelpunkt in einer vorhandenen Strömung wie ein gewöhnliches Flüssigkeitsteilchen mitbewegt. Die Bahn eines Wirbels hat daher in jedem Punkt die Richtung der Stromlinie derjenigen Flüssigkeitsströmung, die durch Weglassung dieses Wirbels entsteht. Wir denken uns die zu untersuchende Flüssigkeitsströmung in zwei Anteile zerlegt. Der eine Anteil sei der zu untersuchende Potential-Wirbel in dem jeweiligen Wirbelpunkt, der andere Anteil sei die durch Weglassung des Wirbels entstehende Strömung. Das Potential der Wirbelströmung sei Φ_w, die Potentiale der beiden Strömungsanteile werden mit Φ_{1w} und Φ_{2w} bezeichnet. Der Wirbel befinde sich in dem Punkte $w_a = u_a + i v_a$, wobei unter w die komplexe Veränderliche und unter u und v die laufenden Koordinaten zu verstehen sind. Das Potential Φ_{1w} des Wirbels mit der Stärke T läßt sich angeben:

$$\Phi_{1w} = i \frac{T}{2\pi} \ln (w - w_a) \qquad \Phi_w = \Phi_{1w} + \Phi_{2w}.$$

Der Wirbel bewegt sich unter dem Einfluß des Potentials Φ_{2w}, das je nach Lage des Wirbels einen andern Wert annimmt. Die Geschwindigkeit des Wirbels berechnet sich nach den vorhergehenden Ueberlegungen in folgender Weise:

$$c_w = c_u - i c_v = \frac{d w_a}{dt} = \frac{d \Phi_{2w}}{dw}_{\text{für } w = w_1} = \frac{d\left(\Phi_w - i \frac{T}{2\pi} \ln [w - w_a]\right)}{dw}_{\text{für } w = w_a} \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

[1]) Kirchhoff, Mechanik — M. Lagally, Münchener Berichte 1914, S. 377 — Mathematische Zeitschrift Bd. 10, S. 231. — E. J. Routh, Proc. London Math. Soc. Bd. 12, 1880–81 — B. Caldonazzo, Rend. R. Accad. Lincei Bd. 28, 1919. — L. Föppl, Wirbelbewegung hinter einem Kreiszylinder, Münchener Berichte 1913.

c_u und c_v sind die Komponenten der Geschwindigkeit in Richtung der u- bzw. v-Koordinate. Wenn das Potential Φ_w bekannt ist, läßt sich Größe und Richtung der Wirbelgeschwindigkeit bestimmen. Aus diesen Angaben kann die Gleichung der Wirbelbahn in Form einer Differentialgleichung aufgestellt werden. In vielen Fällen ist die Lösung dieser Gleichung nur schwer möglich, da sich die einzusetzenden Größen oft nur durch komplizierte Funktionen ausdrücken lassen.

Eine Wirbelströmung um irgend ein Profil wird in der Regel mit Hilfe der konformen Abbildung aus einer bekannten Wirbelströmung ermittelt. Daher ist es angebracht, das Verhalten der Wirbelbahnen bei der konformen Abbildung näher zu betrachten. Grundsätzlich ist zu bemerken, daß die Wirbelbahnen bei der Abbildung nicht erhalten bleiben; jedoch kann man auch in einer anderen Ebene die Bestimmung einer Kurve vornehmen, die bei der Abbildung in die gesuchte Wirbelbahn übergeht. Da sich in der Ausgangs-Ebene die Strömung häufig in einfacherer Weise darstellen läßt, kann dadurch die Rechnung bisweilen wesentlich vereinfacht werden.

Die neue Ebene werde mit z-Ebene bezeichnet, und die laufenden Koordinaten seien x und y. Die Abbildungsfunktion sei $w = f(z)$, den Funktionen Φ_{1w}, Φ_{2w}, Φ_w entsprechen in der z-Ebene die Funktionen Φ_{1z}, Φ_{2z}, Φ_z der Größe $w_a = u_a + iv_a$, die Größe $z_a = x_a + iy_a$.

Führe ich in Gl. (1) die Substitution $w = f(z)$ aus, so erhalte ich folgende Gleichung:

$$\frac{dz_a}{dt} = \frac{d(x_a - iy_a)}{dt} = \frac{d\Phi_{2z}}{dz}_{\text{für } z = z_a} = \frac{d\left(\Phi_z - i\frac{T}{2\pi}\ln\left\{f(z) - f(z_a)\right\}\right)}{dz}_{\text{für } z = z_a} \quad . \quad . \quad (2).$$

Durch diese Gleichung ist in jedem Punkte die Richtung einer Kurve in der z-Ebene festgelegt, die bei der Abbildung in die gesuchte Wirbelbahn übergeht. Die tatsächliche Wirbelbahn der z-Ebene würde durch die Gleichung

$$\frac{dz_a'}{dt} = \frac{d\left(\Phi_z - i\frac{T}{2\pi}\ln\left\{(z - z_a)\right\}\right)}{dz}_{\text{für } z - z_a}$$

bestimmt werden können und ist von der oben festgelegten Kurve verschieden. Es soll nun dazu übergegangen werden, die Wirbelbahnen für die beiden angegebenen Fälle zu bestimmen.

1. Wirbelbewegung um eine im Endlichen begrenzte ebene Wand von unendlich kleiner Wandstärke. In der z-Ebene mit den Koordinaten x, y sei ein zur y-Achse symmetrisches, entgegengesetzt drehendes Wirbelpaar mit den Koordinaten $z_a = x_a + iy_a$ und $\bar{z}_a = x_a - iy_a$ gegeben. Das Potential dieser Wirbelbewegung lautet:

$$\Phi_z = i\frac{T}{2\pi}\left\{\ln(z - z_a) - \ln(z - \bar{z}_a)\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Durch die Abbildung $w = z^2$ werde die z-Ebene in eine neue w-Ebene abgebildet. Die eine Hälfte geht in das eine Blatt der w-Ebene, die andere Hälfte in das zweite Blatt der w-Ebene über, der x-Achse selbst entspricht die positive u-Achse. Der eine Wirbel fällt in das obere, der andere in das untere Riemannsche Blatt. Bezeichnet man mit r_a, φ_a die Polar-Koordinaten des Wirbelpunktes z_a der z-Ebene und mit ϱ_a, ϑ_a die Polar-Koordinaten des Wirbelpunktes w_a der w-Ebene, so bestehen zwischen diesen Größen folgende Beziehungen: $w_a = z_a^2$, $\varrho_a = r_a^2$, $\vartheta_a = 2\varphi_a$.

Physikalisch betrachtet haben wir den Fall eines Wirbels in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit vor uns, in welcher an Stelle der positiven u-Achse eine feste Begrenzung anzunehmen ist. Das Potential des Wirbels lautet:

$$\Phi_w = i\frac{T}{2\pi}\ln(w - w_a).$$

Das Potential der Wirbelbewegung in der w-Ebene ergibt sich aus Gl. (3) durch Einsetzen von $w = z^2$ bzw. $w_a = z_a^2$ zu:

$$\Phi_w = i\frac{T}{2\pi}\left\{\ln(\sqrt{w} - \sqrt{w_a}) - \ln(\sqrt{w} - \sqrt{\bar{w}_a})\right\}.$$

Die Geschwindigkeit der Wirbelbewegung errechnet sich nach den Ueberlegungen des vorhergehenden Abschnittes wie folgt:

$$\frac{dw_a}{dt} = \frac{d(u_a - iv_a)}{dt} = i\frac{T}{2\pi}\frac{d\left\{\ln(\sqrt{w} - \sqrt{w_a}) - \ln(\sqrt{w} - \sqrt{\bar{w}_a}) - \ln(w - w_a)\right\}}{dw}_{\text{für } w = w_a}.$$

Führt man die Substitution $w = z^2$ aus, so erhält man die folgende Gleichung, durch welche eine Kurve in der z-Ebene bestimmt ist:

$$\frac{dz_a}{dt} = \frac{d(x_a - iy_a)}{dt} = -i\frac{T}{2\pi}\,\frac{d\{\ln(z-\bar{z}_a) + \ln(z+z_a)\}}{dz}\ \text{für } z = z_a = -i\frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{z_a-\bar{z}_a} + \frac{1}{z+z_a}\right\} \qquad (4)^{1)}.$$

Durch Einsetzen von x_a und y_a und Trennung von reell und imaginär ergibt sich:

$$\frac{dx_a}{dt} - i\frac{dy_a}{dt} = \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{x_a^2 + 2y_a^2}{2y_a(x_a^2+y_a^2)} + i\frac{y_a x_a}{2y_a(x_a^2+y_a^2)}\right\}$$

$$\frac{dx_a}{dy_a} = \frac{x_a^2 + 2y_a^2}{y_a \cdot x_a} \qquad (5).$$

Die Lösung von Gl. (5) lautet:

$$y_a\sqrt{x_a^2 + y_a^2} = \text{konst.}$$

oder in Polar-Koordinaten:

$$r_a^2 \sin\varphi_a = \text{konst.}$$

Bildet man diese Kurve durch Einsetzen von ϱ_a und ϑ_a in die w-Ebene ab, so erhält man die Gleichung der gesuchten Wirbelbahn:

$$\underline{\varrho_a \sin\vartheta_a/2 = \text{konst.}} \qquad (6).$$

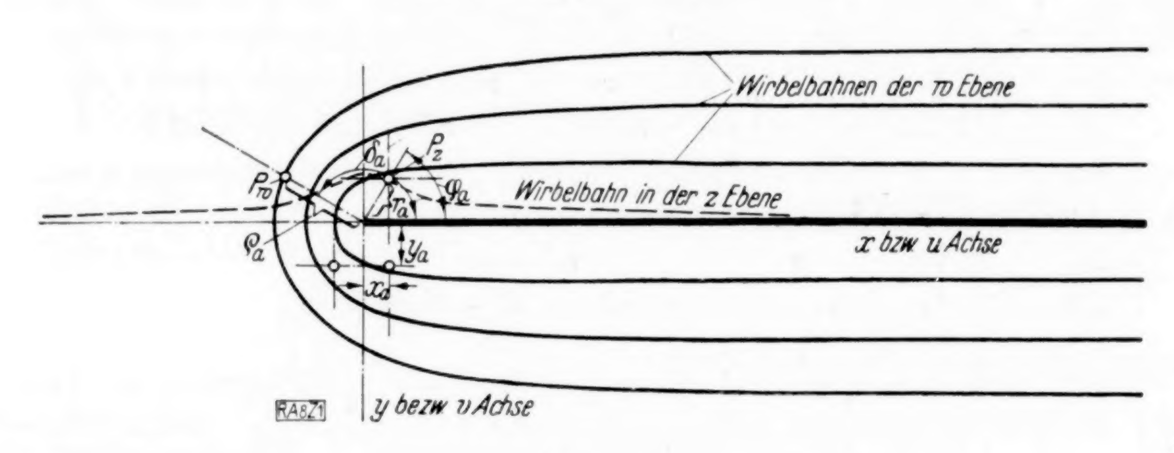


Abb. 1.

Damit ist die Wirbelbahn für den gegebenen Fall bestimmt. In Abb. 1 sind die aus Gl. (6) sich ergebenden Kurven aufgezeichnet. Wir erhalten das interessante Ergebnis, daß sich ein einzelner Wirbel in einer Flüssigkeit von einer ebenen begrenzten Wand von unendlich kleiner Wandstärke nie mehr als auf die doppelte Entfernung von dieser fortbewegen kann.

2. Wirbelbewegung um eine Platte von unendlich kleiner Wandstärke in einer ruhenden Flüssigkeit. Die Bezeichnungen aus dem vorhergehenden Abschnitt sollen für diesen Fall wieder verwendet werden. Es ist zunächst die Strömung zu bestimmen, die durch einen Potentialwirbel um den Einheitskreis erzeugt wird. Im Punkte z_a der z-Ebene sei ein Potentialwirbel gegeben. Damit der Einheitskreis Stromlinie und die Zirkulation um den Kreis gleich 0 wird, muß ein gleichgerichteter Wirbel im 0-Punkt und ein entgegengesetzt drehender Wirbel im Punkte $\frac{1}{\bar{z}_a}$ angeordnet werden.

Das Potential dieser Wirbelströmung lautet:

$$\Phi_z = i\frac{T}{2\pi}\left\{\ln(z - z_a) - \ln\left(z - \frac{1}{\bar{z}_a}\right) + \ln z\right\}.$$

Durch Abbildung mit der Funktion $w = {}^1/_2\,(z + {}^1/z)$ geht das Kreisprofil in ein Geradenstück von der Länge 2 über. Wir erhalten ein Potential Φ_w, welches uns, physikalisch betrachtet, die Strömung darstellt, welche durch einen Potentialwirbel in einer ruhenden Flüssigkeit um eine ebene Platte erzeugt wird.

[1] Gl. (4) kann auch so gedeutet werden, daß sich ein Wirbel in der z-Ebene betrachtet unter dem Einfluß von zwei gleich gerichteten Wirbeln in den Punkten $\bar{z}_a$ und $-z_a$ bewegt.

Die Geschwindigkeit des Wirbels bestimmt sich wieder wie in dem vorhergehenden Fall durch Weglassen des Potentialwirbels im Punkte w_a. Wir erhalten:

$$\frac{dw_a}{dt} = \frac{d\left\{\Phi_w - i\frac{T}{2\pi}\ln(w-w_a)\right\}}{dw} \quad \text{für } w = w_a.$$

Durch Substitution von $w = {}^1/_2\,(z + {}^1/z)$ und durch Einsetzen von Φ_z kommt man auf folgende Gleichungen:

$$\frac{dz_a}{dt} = \frac{d(x_a - iy_a)}{dt} = \frac{d\left(\Phi_z - i\frac{T}{2\pi}\ln\left[{}^1/_2\left(z + \frac{1}{z}\right) - {}^1/_2\left(z_a + \frac{1}{z_a}\right)\right]\right)}{dz} \quad \text{für } z = z_a$$

$$\frac{dz_a}{dt} = i\frac{T}{2\pi}\,\frac{d\left[2\ln z - \ln\left(z - \frac{1}{z_a}\right) - \ln\left(z - \frac{1}{z_a}\right)\right]}{dz} \quad \text{für } z = z_a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)^{1)}.$$

$$\frac{dz_a}{dt} = \frac{d(x_a - iy_a)}{dt} = \left(\frac{dr_a}{dt} - i r_a \frac{d\varphi_a}{dt}\right) e^{-i\varphi_a} = i\frac{T}{2\pi}\left(\frac{2}{z_a} - \frac{1}{z_a - \frac{1}{z_a}} - \frac{1}{z_a - \frac{1}{z_a}}\right)$$

Ersetzt man z_a durch $r_a \cdot e^{i\varphi_a}$ und trennt die reellen und die imaginären Glieder, so kann man die Ausdrücke $\frac{dr_a}{dt}$ und $\frac{d\varphi_a}{dt}$ bestimmen.

$$\frac{dr_a}{dt} - i r_a \frac{d\varphi_a}{dt} = i\frac{T}{2\pi}\left(\frac{2}{r_a} - \frac{r_a}{r_a^2 - 1} - \frac{r_a - 1/r_a \cdot \cos 2\varphi - i \sin 2\varphi}{r_a^2 + 1/r_a^2 - 2\cos 2\varphi}\right)$$

$$\frac{dr_a}{dt} = \frac{T \sin 2\varphi_a}{2\pi \cdot r_a\,(r_a^3 + 1/r_a^2 - 2\cos 2\varphi_a)}$$

$$r_a\frac{d\varphi_a}{dt} = \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{2}{r_a} - \frac{r_a}{r_a^2 - 1} - \frac{r_a^2 - \cos 2\varphi}{r_a\,(r_a^2 + 1/r_a^2 - 2\cos 2\varphi_a)}\right\}.$$

Hieraus ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{d\varphi_a}{dr_a} = \frac{\cos^2\varphi_a\,(r_a^2 - 3) + 1 + 1/r_a^2}{r_a\,(r_a^2 - 1)\sin\varphi_a\cos\varphi_a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Diese Differentialgleichung läßt sich integrieren und wir erhalten als Lösung Gl. (10):

$$\cos^2\varphi_a = \frac{1 - 2r_a^4 + r_a^8\,\text{konst.}}{4r_a^2\,(r_a^2 - 1)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

Damit ist die Wirbelbahn in den Koordinaten der z-Ebene bestimmt. Die Gleichung der Bahn kann durch Einsetzen der entsprechenden Werte für r_a und φ_a auch in den Koordinaten der w-Ebene ausgedrückt werden; es soll jedoch hiervon abgesehen werden, da die Ausdrücke zu kompliziert werden.

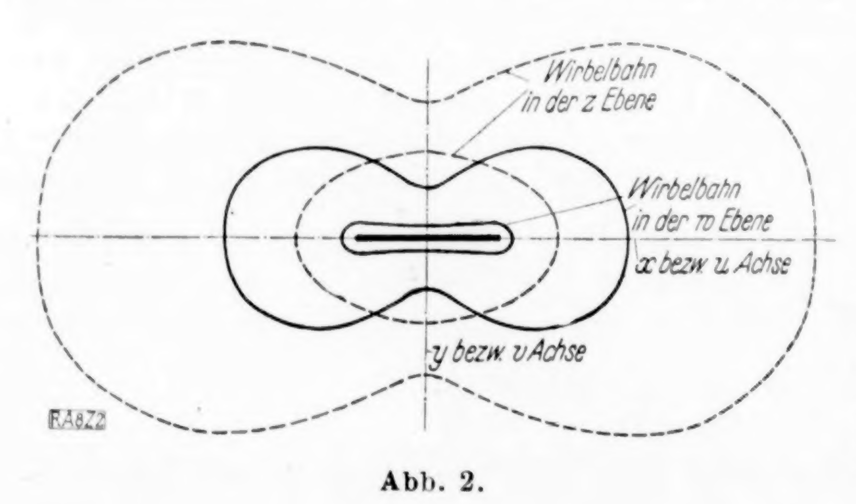


Abb. 2.

In Abb. 2 sind zwei Wirbelbahnen aufgezeichnet. Diese wurden graphisch durch Abbildung mit Hilfe der bekannten Konstruktion aus der entsprechenden Kurve in der z-Ebene, die durch Gl. (10) gegeben ist, ermittelt.

Die Wirbelbahn um eine Platte hat eine recht eigentümliche Form, insofern als diese nach der Plattenmitte zu eingebuchtet verläuft. In einiger Entfernung von der Platte ist die Geschwindigkeit jedoch so gering, daß diese Abweichung kaum beobachtet werden dürfte.

---

[1]) Gl. (8) kann wieder in der Weise gedeutet werden, daß sich ein Wirbel, in der z-Ebene betrachtet, unter dem Einfluß von zwei entgegengesetzt drehenden Wirbeln in den Punkten $\frac{1}{z_a}$ und $\frac{1}{z_a}$ und eines gleich gerichteten Wirbels von der doppelten Wirbelstärke im Nullpunkt bewegt.

Es soll noch darauf hingewiesen werden, daß das Verhalten der Wirbelbahnen bei konformer Abbildung bereits von Lagally[1]), dem der Verfasser verschiedene wichtige Hinweise verdankt, in der Math. Zeitschrift 1921 behandelt worden ist. Die dort aufgestellte erweiterte Routhsche Formel gestattet in vielen Fällen eine Abkürzung des hier durchgeführten Rechenverfahrens.

Da den Wirbelströmungen in der Strömungsforschung eine immer größer werdende Rolle zufällt, dürfte diesen Ableitungen nicht nur ein theoretisches, sondern auch ein physikalisches Interesse zukommen. 8

Über die Torsion von Walzeisen-Profilen.

Von **CURT SCHMIEDEN** in Danzig-Langfuhr.

Einleitung. In der vorliegenden Arbeit werden einige Anwendungen der von Herrn Trefftz[2]) entwickelten Theorie der Verdrehung von Trägern polygonalen Querschnitts gegeben. Im ersten Teil (Abschnitt 2—4) wird die Spannungsverteilung in einem auf Torsion beanspruchten *T*-Träger mit unendlich langen Schenkeln allgemein berechnet und die maximale Spannung in Abhängigkeit von dem Verhältnis der Flansch- und Stegbreite ermittelt. Im zweiten Teil (Abschnitt 5—9) wird eine sehr genaue Formel für den Drillungswiderstand von Winkel-, **U**- und **Z**-Eisen angegeben und der Fehler dieser Formel abgeschätzt. Da die Trefftzsche Theorie jetzt im zweiten Bande der »Partiellen Differentialgleichungen« von Riemann-Weber[3]) dargestellt und daher leicht zugänglich ist, seien hier nur die für das folgende nötigen Formeln zusammengestellt und der zu ihnen führende Weg ohne Beweise kurz angedeutet.

1. Zusammenstellung der Grundformeln. Bekanntlich läßt sich die Torsionsaufgabe für jeden Querschnitt zurückführen auf die Bestimmung einer Spannungsfunktion F[4]), die der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \equiv \Delta F = -2 G \vartheta \qquad (1)$$

genügen muß (G Schubmodul, ϑ Verdrehungswinkel), und auf dem Rande — wenigstens bei Vollquerschnitten — überall verschwindet. Die Schubspannungen erhält man aus ihr durch Differentiation:

$$\tau_{zx} = + \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = - \frac{\partial F}{\partial x} \qquad (2).$$

Führt man nun statt F eine neue Funktion ψ ein, die definiert sei durch

$$G \vartheta \psi = F + \frac{x^2 + y^2}{2} \cdot G \vartheta \qquad (3),$$

so wird

$$\Delta \psi = 0 \qquad (1a),$$

$$\tau_{zx} = + G \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial y} - G \vartheta y ; \quad \tau_{zy} = - G \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial x} + G \vartheta x \qquad (2a)$$

und auf dem Rande muß sein

$$\psi = \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Damit ist aber das Problem auf eine Randwertaufgabe der Potentialtheorie zurückgeführt und läßt sich so formulieren: Gesucht ist diejenige analytische Funktion von $z = x + i y$, deren Imaginärteil auf dem Rande des Bereichs die Randwerte $\frac{x^2 + y^2}{2}$ annimmt. Nennen wir in der üblichen Weise den Realteil dieser Funktion φ und setzen

$$w = \varphi + i \psi, \quad \frac{d w}{d z} = p + i q \qquad (4),$$

so werden die Spannungen

$$\tau_{zx} = - G \vartheta (y - p), \quad \tau_{zy} = - G \vartheta (q - x) \qquad (2b).$$

[1]) Lagally, »Ueber ein Verfahren zur Transformation ebener Wirbelprobleme«. Mathematische Zeitschrift 1921 Bd. 10.

[2]) Math. Ann. Bd. 82, 1921, S. 97 ff.

[3]) Braunschweig 1927, S. 645 ff.

[4]) Siehe etwa Föppl, Drang und Zwang Bd. 2, § 66.

Für polygonale Querschnitte wird das Problem besonders einfach, wenn man statt der Funktion w ihre zweite Ableitung einführt, also setzt

$$\frac{d^2 w}{d z^2} = s + i t; \quad s = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y}, \quad t = -\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Sei nämlich α_ν der Winkel, den die ν-te Polygonseite mit der x-Achse bildet, so liefert eine zweimalige Differentiation der Randbedingung für ψ (Randwerte seien durch den Index r gekennzeichnet):

$$\frac{d^2 \psi_r}{d \sigma^2} = s_r \sin 2\alpha_\nu + t_r \cos 2\alpha_\nu = 1 \quad (\sigma \text{ Bogenlänge}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

D. h. aber, daß bei der durch $s + i t$ vermittelten konformen Abbildung die ν-te Seite des Polygons in der z-Ebene auf ein Stück der Geraden (6) abgebildet wird, also das gesamte Polygon wieder in ein Polygon der $s + i t$-Ebene übergeht, das dem Einheitskreis dieser Ebene umschrieben ist, wobei einem Eckenwinkel $\beta_i \pi$ des z-Polygons ein Winkel

$$\gamma_i \pi = (2 m_i + 1)\pi - 2\beta_i \pi; \quad m_i \text{ ganze Zahl} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

des $s + i t$-Polygons entspricht.

Die Aufgabe reduziert sich demnach auf die konforme Abbildung dieser beiden Polygone aufeinander, derart, daß die Ecken den Ecken entsprechen. Das ist im allgemeinen nur möglich, wenn man in der $s + i t$-Ebene Verzweigungspunkte in entsprechender Anzahl und Verteilung anbringt. Für die praktische Durchführung der Abbildung führt man eine Zwischenveränderliche τ ein, auf deren oberer Halbebene beide Polygone abgebildet werden. Die Abbildung der z-Ebene auf die obere τ-Halbebene liefert dann die Schwarzsche Formel, die der $s + i t$-Ebene eine ganz ähnlich gebaute, deren Zähler nur noch eine ganze rationale Funktion enthält, deren Nullstellen eben den Verzweigungspunkten entsprechen.

Die genaue Diskussion dieser Abbildungsgleichungen liefert speziell für Träger, die sich aus horizontalen und vertikalen Geraden zusammensetzen, folgendes Resultat:

Die Randbedingung (6) vereinfacht sich zu

$$\left.\begin{array}{l} t_r = +1 \text{ auf den horizontalen Geraden,} \\ t_r = -1 \text{ auf den vertikalen Geraden} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6a).$$

Entspricht dem Unendlichen der τ-Ebene keine Ecke des Polygons, so ist

$$z = C \int^{\tau} \frac{d\tau}{\Pi(\tau - \tau_i)^{1-\beta_i}}, \quad \beta_i = \left\{\begin{array}{l} {}^1/_2 \text{ an ausspringenden Ecken} \\ {}^3/_2 \text{ an einspringenden Ecken} \\ 0 \text{ für einen ins Unendliche gehenden Parallelstreifen} \end{array}\right\} \quad (8),$$

$$s + i t = \int^{\tau} \frac{R(\tau)\, d\tau}{\Pi(\tau - \tau_i)^{2\beta_i}}, \quad R(\tau) = A_0 + A_1 \tau + \ldots + A_{2n-6}\, \tau^{2n-6} \quad . \quad . \quad (9),$$

wenn n die Anzahl der Seiten und A_i reelle Konstanten sind. Durch eine lineare Substitution kann man sich natürlich von der Bedingung frei machen, daß dem Unendlichen keine Ecke entsprechen soll. Die Anzahl der freien Konstanten, nämlich $2n - 5$ Konstante A_i, je zwei Integrationskonstanten für $s + i t$ und $p + i q$ und eine für ψ reichen gerade aus, um die n Bedingungen (6a) und die n Bedingungen, daß ψ_r an den Ecken gleich $\frac{x^2 + y^2}{2}$ werden soll, zu erfüllen. Es sei noch angemerkt, daß ein einem Parallelstreifen (oder einem Winkel »O«) entsprechender Faktor in (9) gar nicht auftritt. Da der Nenner in (9) nur ganzzahlige Exponenten enthält, kann man den Integranden in Partialbrüche zerlegen und erhält:

$$s + i t = \sum_1^n a_i \ln(\tau - \tau_i) + \Sigma' \left(\frac{b_i}{\tau - \tau_i} + \frac{c_i}{(\tau - \tau_i)^2}\right); \quad \Sigma a_i = 0 \quad . \quad . \quad (9a),$$

worin die erste Summe über alle Ecken, die zweite nur über die einspringenden zu erstrecken ist; die Zusatzbedingung für die a_i fällt weg, wenn dem Unendlichen der τ-Ebene eine Ecke des Polygons entspricht.

A. Der T-Träger mit unendlich langem Flansch und Steg.

2. Die Abbildung der z- und $s + i t$-Ebene auf die τ-Ebene. Wir haben nach Formel (8) und (9) zuerst die Abbildungen der z- und $s + i t$-Ebene auf die obere τ-Halbebene durchzuführen. Der Querschnitt des T-Trägers hat bei E und C die

Winkel $\beta_i \pi = {}^3/_2\,\pi$ bei B, D, F die Winkel $\beta_i \pi = 0$. Die Stegbreite sei $2\,d_1$, die Flanschbreite d_2 (Abb. 1). Die Abbildung sei so normiert, daß der Punkt A, den wir mit $z = 0$ zusammenfallen lassen wollen, in den Punkt $\tau = 0$ übergeht, der Punkt B in $\tau = \varkappa < 1$, C in $\tau = +1$ und D in $\tau = \infty$. Dann gehen aus Symmetriegründen F und E in $\tau = -\varkappa$ bzw. in $\tau = -1$ über. Somit wird nach (8)

$$z = C\int_0^\tau \frac{\sqrt{\tau^2-1}}{\tau^2-\varkappa^2}\,d\tau \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10).$$

Abb. 1.

Die Auswertung dieses elementaren Integrals ergibt:

$$z = i\,C\left\{\arccos\tau - \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{1-\varkappa^2}}{2\,\varkappa}\ln\left(\frac{\tau\sqrt{1-\varkappa^2}+\varkappa\sqrt{1-\tau^2}}{\tau\sqrt{1-\varkappa^2}-\varkappa\sqrt{1-\tau^2}}\right) - i\,\pi\,\frac{\sqrt{1-\varkappa^2}}{2\,\varkappa}\right\} \quad (10\text{a}).$$

Die Konstanten C und $\varkappa$ bestimmen sich aus der Bedingung, daß für $\tau = \pm 1$ $z = \pm d_1 + i\,d_2$ sein soll:

$$d_1 + i\,d_2 = \frac{C\pi}{2}\,\frac{\sqrt{1-\varkappa^2}}{\varkappa} - \frac{i\,C\pi}{2}, \qquad -d_1 + i\,d_2 = \frac{C\pi}{2}\,\frac{\sqrt{1-\varkappa^2}}{\varkappa} + \frac{i\,C\pi}{2}.$$

Daraus folgt:

$$C = \frac{2\,i\,d_1}{\pi}; \quad d_2 = d_1\,\frac{\sqrt{1-\varkappa^2}}{\varkappa} \quad \text{oder} \quad \varkappa = \frac{d_1}{\sqrt{d_1^2+d_2^2}} \quad . \; . \; . \quad (10\text{b}).$$

Setzen wir C oben ein und behalten $\varkappa$ als Abkürzung für den eben berechneten Ausdruck bei, so folgt nach leicht zu erkennenden Umformungen:

$$z = \frac{2\,d_1}{\pi}\arcsin\tau + \frac{d_2}{\pi}\left\{\ln\left(\frac{\tau\sqrt{1-\varkappa^2}+\varkappa\sqrt{1-\tau^2}}{\tau\sqrt{1-\varkappa^2}-\varkappa\sqrt{1-\tau^2}}\right) + i\,\pi\right\} \quad . \; . \; . \quad (11),$$

für $|\tau| < \varkappa$ ist der Nenner im zweiten Gliede negativ, der ganze Ausdruck also rein reell, wobei, wie üblich, der Logarithmus auf seinen Hauptwert eingeschränkt ist; für $|\tau| > \varkappa$ wird der Logarithmus rein reell, z beschreibt also die obere Begrenzung des Flansches; für $|\tau| > 1$ schreibt man den Ausdruck zweckmäßig um. Eine einfache Rechnung gibt:

$$z = \frac{2\,i\,d_1}{\pi}\left\{\ln\left(\tau+\sqrt{\tau^2-1}\right) - \frac{i\,\pi}{2}\right\} - \frac{2\,i\,d_2}{\pi}\left\{\operatorname{arc\,tg}\frac{\varkappa\sqrt{\tau^2-1}}{\tau\sqrt{1-\varkappa^2}} - \frac{\pi}{2}\right\} \quad . \quad (11\text{a}),$$

für $|\tau| > 1$ werden jetzt die beiden Seiten des Steges durchlaufen.

Aus (9a) erhalten wir unter Hinzufügung einer komplexen Integrationskonstanten:

$$s + i t = a_0 \ln(\tau - 1) + a_1 \ln(\tau + 1) + \frac{b_1}{\tau - 1} + \frac{b_2}{\tau + 1} + \frac{c_1}{(\tau - 1)^2} + \frac{c_2}{(\tau + 1)^2} + A + iB \quad (12a).$$

Die Randbedingung (6a) gibt drei Gleichungen zur Bestimmung von a_0, a_1 und B. Es wird

$$\begin{aligned} &\text{für } \tau > 1 \quad t = -1 \longrightarrow -1 = B, \\ &\text{für } |\tau| < 1 \quad t = +1 \longrightarrow 1 = a_0 \pi + B, \\ &\text{für } \tau < -1 \quad t = -1 \longrightarrow -1 = a_0 \pi + a_1 \pi + B. \end{aligned}$$

somit wird: $a_0 = \frac{2}{\pi}$; $a_1 = -a_0 = -\frac{2}{\pi}$; $B = 1$.

Von den übrigen Konstanten können wir aus Symmetriebetrachtungen drei weitere bestimmen. Vertauscht man für $|\tau| < 1$ in z τ mit $-\tau$, so wechselt x sein Vorzeichen, während y es beibehält. Da die Spannungen offenbar in beiden Schenkeln an entsprechenden Stellen von gleichem absoluten Betrage sein müssen, so folgt aus:

$$\tau_{xz} = G\,\vartheta\,(-y + p), \qquad \tau_{yz} = G\,\vartheta\,(x - q),$$

$$(p)_{+\tau} = (p)_{-\tau}, \qquad (q)_{+\tau} = -(q)_{-\tau},$$

und daraus wegen $s = \frac{\partial p}{\partial x}$, $t = \frac{\partial q}{\partial x}$

$$(s)_{+\tau} = -(s)_{-\tau}, \qquad (t)_{+\tau} = (t)_{-\tau}.$$

Nun ist für $0 < \tau < 1$

$$s + i t = \frac{2}{\pi} \ln \frac{1 - \tau}{1 + \tau} + 2i - \frac{b_1}{1 - \tau} + \frac{b_2}{1 + \tau} + \frac{c_1}{(1 - \tau)^2} + \frac{c_2}{(1 + \tau)^2} + A - i$$

und für $-\tau = \tau'$ und $0 < \tau' < 1$

$$s + i t = -\frac{2}{\pi} \ln \frac{1 - \tau'}{1 + \tau'} + 2i - \frac{b_1}{1 + \tau'} + \frac{b_2}{1 - \tau'} + \frac{c_1}{(1 + \tau')^2} + \frac{c_2}{(1 - \tau')^2} + A - i.$$

Nun soll für $\tau = \tau'$, $(s)_\tau = -(s)_{\tau'}$, $(t)_\tau = (t)_{\tau'}$ sein, was offenbar nur erfüllt ist, wenn $b_1 = b_2 = \frac{b}{2}$; $c_1 = -c_2 = \frac{c}{2}$; $A = 0$ wird.

Somit wird endgültig:

$$s + it = \frac{2}{\pi} \ln \frac{\tau - 1}{\tau + 1} + \frac{b\,\tau}{\tau^2 - 1} + \frac{2\,c\,\tau}{(\tau^2 - 1)^2} - i \quad \ldots \ldots \quad (12a).$$

3. Berechnung der Spannungen. Durch Integration von (12a) nach z erhalten wir die Funktion $p + iq$. Wegen

$$dz = \frac{2\,i\,d_1}{\pi} \frac{\sqrt{\tau^2 - 1}}{\tau^2 - \varkappa^2}\, d\tau \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

wird also

$$\left. \begin{aligned} p + iq = \int_0^z (s + it)\, dz = -iz + \frac{4\,i\,d_1}{\pi^2} \int_0^\tau \ln \frac{\tau - 1}{\tau + 1} \cdot \frac{\sqrt{\tau^2 - 1}}{\tau^2 - \varkappa^2}\, d\tau \\ + \frac{2\,i\,d_1\,b}{\pi} \int_0^\tau \frac{\tau\, d\tau}{\sqrt{\tau^2 - 1}\,(\tau^2 - \varkappa^2)} + \frac{4\,i\,d_1\,c}{\pi} \int_0^\tau \frac{\tau\, d\tau}{\sqrt{(\tau^2 - 1)^3}\,(\tau^2 - \varkappa^2)} + p_0 \end{aligned} \right\} \quad (14).$$

Denn die hierbei auftretende Integrationskonstante ist $(p + iq)_0$, die sich auf p_0 reduziert, da q_0 aus Symmetriegründen verschwindet.

Für $|\tau| < 1$ schreiben wir die Integrale in reelle Form um. Eine einfache Rechnung zeigt, daß für $|\tau| < 1$

$$\left. \begin{aligned} p + iq = iz - \frac{4\,d_1}{\pi^2} \int_0^\tau \ln\left(\frac{1 - \tau}{1 + \tau}\right) \frac{\sqrt{1 - \tau^2}}{\tau^2 - \varkappa^2}\, d\tau \\ + \frac{2\,d_1\,b}{\pi} \int_0^\tau \frac{\tau\, d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}\,(\tau^2 - \varkappa^2)} - \frac{4\,d_1\,c}{\pi} \int_0^\tau \frac{\tau\, d\tau}{\sqrt{(1 - \tau^2)^3}\,(\tau^2 - \varkappa^2)} + p_0 \end{aligned} \right\} \quad (14a)$$

wird, wobei Gebrauch von (10) gemacht wurde. Als Randbedingung an den Enden des Flansches und Steges haben wir Endlichbleiben der Spannungen zu verlangen; außerdem

muß auf der Begrenzung des Flansches τ_{yz} verschwinden, also $q = x$ sein, entsprechend auf dem Rande des Steges τ_{xz} verschwinden, also $p = y$ sein. Da in (14a) die Integrale sämtlich reell sind, ist das Verschwinden von τ_{yz} für die untere Begrenzung des Flansches bereits garantiert. Um das Endlichbleiben der Spannungen für $\tau \to \varkappa$ zu erzwingen, integrieren wir (14a) partiell und erhalten:

$$p + i q = i z + \frac{d_1}{\pi \varkappa} \ln \frac{\tau - \varkappa}{\tau + \varkappa} \left\{ - \frac{2}{\pi} \ln \frac{1-\tau}{1+\tau} \sqrt{1-\tau^2} + \frac{b\,\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} - \frac{2\,c\,\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)^3}} \right\} + p_0 + \text{Integrale},$$

die für $0 < |\tau| < \varkappa$ konvergieren.

Soll also für $|\tau| \to \varkappa$ τ_{xz} endlich bleiben, so muß für dieses τ der Klammerausdruck verschwinden, d. h. b und c müssen der folgenden Gleichung genügen:

$$\frac{b}{1-\varkappa^2} - \frac{2\,c}{(1-\varkappa^2)^2} = \frac{2}{\pi \varkappa} \ln \frac{1-\varkappa}{1+\varkappa} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Infolge dieser Gleichung verschwindet auch der rein imaginäre Betrag des Integrals, das für $|\tau| > \varkappa$ von dem Umlauf um den Punkt $\tau = \varkappa$ herrührt, so daß auch auf der oberen Begrenzung des Flansches überall τ_{yz} verschwindet.

Bezeichnen wir den Grenzwert, dem p für $|\tau| \to \varkappa$ zustrebt und der nach (15) sicher endlich ist, mit $p_\varkappa$ bzw. $p_{-\varkappa}$ und nennen weiter die Werte von ψ an entsprechenden Stellen der oberen und unteren Begrenzung des Flansches ψ_{OF} bzw. ψ_{UF}, so gilt:

$$\psi_{OF} = \frac{d_2^2 + x^2}{2}, \qquad \psi_{UF} = \frac{x^2}{2}, \qquad \psi_{OF} - \psi_{UF} = \frac{d_2^2}{2}.$$

Andererseits ist wegen $\dfrac{\partial \psi}{\partial y} = p$

$$\psi_{OF} - \psi_{UF} = \int_0^{d_2} \frac{\partial \psi}{\partial y}\, d\,y = \int_0^{d_2} p\, d\,y\,,$$

also muß $p_{\pm\varkappa}$ der Gleichung genügen:

$$\int_0^{d_2} p_\varkappa\, d\,y = \frac{d_2^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Genau dasselbe gilt natürlich auch für den Steg. Aus (14) sieht man, daß für $\tau \to \infty$ alle Integrale konvergieren, $p + i\,q$ dort also von selbst endlich bleibt. Jedoch wird jetzt nicht ohne weiteres $p = y$; um das zu erreichen, müssen wir vielmehr eine weitere Gleichung für die drei freien Konstanten aufstellen. Endlich gilt dieselbe Ueberlegung wie oben für das Ende des Steges:

$$\int_{-d_1}^{+d_1} q_\infty\, d\,x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Da in entsprechender Bezeichnungsweise

$$\psi_{rs} = \frac{d_1^2 + y^2}{2}, \qquad \psi_{es} = \frac{d_1^2 + y^2}{2}, \qquad \psi_{rs} - \psi_{es} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = q \text{ ist.}$$

Wir erhalten also für unsere drei Konstantem b, c und p_0 die Gl. (15) bis (17) und die Zusatzbedingung, daß für den Rand des Steges $p = y$ sein soll. Damit die Aufgabe nicht überbestimmt ist, muß somit eine der vier Gleichungen eine Folge der drei anderen sein oder eine Identität ergeben. Wir werden nachher sehen, daß für (17) das letztere zutrifft.

4. Berechnung von b, c und p_0. Für die folgenden Rechnungen ist es zweckmäßig, die in (14) bzw. (14a) auftretenden Wurzeln fortzuschaffen. Das geschieht durch Abbildung der τ-Ebene auf die Ebene einer neuen Variablen ζ durch die Transformation:

$$\tau = \frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2}, \qquad \zeta^2 = \frac{1-\tau}{1+\tau} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

Hierdurch geht die obere τ-Halbebene in den vierten Quadranten der ζ-Ebene über, wenn man in üblicher Weise den Winkel auf das Intervall von $-\pi$ bis $+\pi$ einschränkt. Es entsprechen sich die Punkte (Abb. 1):

$$\tau = 0\,, \quad \zeta = +1\,, \quad \tau = \varkappa\,, \quad \zeta = \sqrt{\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}} = \lambda\,, \quad \tau = +1\,, \quad \zeta = 0$$

$$\tau = \pm\infty\,, \quad \zeta = -i\,, \quad \tau = -\varkappa\,, \quad \zeta = \sqrt{\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}} = \frac{1}{\lambda}\,, \quad \tau = -1\,, \quad \zeta = \infty\,.$$

Daß der vierte Quadrant zu wählen ist, erkennt man am einfachsten dadurch, daß man τ eine Kurve in seinem Bereich durchlaufen läßt und das Bild dieser Kurve in der ζ-Ebene aufsucht. Setzen wir $\tau = e^{i\varphi}\ 0 \leqq \varphi \leqq \pi$, lassen es also den Einheitskreis der τ-Ebene beschreiben, so wird

$$\zeta = \sqrt{\frac{1-e^{i\varphi}}{1+e^{i\varphi}}} = \sqrt{\frac{1}{i}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} = e^{-i\pi/4}\sqrt{\operatorname{tg}\varphi/2}\,,$$

beschreibt also die Winkelhalbierende des vierten Quadranten. Somit geht die Begrenzung des Flansches in die positive reelle Achse, die des Steges in die negative imaginäre Achse der ζ-Ebene über. Rechnet man die in (14a) auftretenden Integrale von τ auf ζ um, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^\tau \ln\left(\frac{1-\tau}{1+\tau}\right)\frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2-\varkappa^2}\,d\tau &= -\frac{16}{1-\varkappa^2}\int_1^\zeta \frac{\zeta^2\ln\zeta\,d\zeta}{(1+\zeta^2)(\zeta^2-\lambda^2)\left(\zeta^2-\frac{1}{\lambda^2}\right)} \\
&= 4\int_1^\zeta \frac{\ln\zeta\,d\zeta}{1+\zeta^2} + \frac{2(1-\varkappa)}{\varkappa}\int_1^\zeta \ln\zeta\left(\frac{1}{\zeta^2-\lambda^2}-\frac{1}{(\lambda\zeta)^2-1}\right)d\zeta \\
\int_0^\tau \frac{\tau\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}\,(\tau^2-\varkappa^2)} &= -\frac{2}{1-\varkappa^2}\int_1^\zeta \frac{(1-\zeta^2)\,d\zeta}{(\zeta^2-\lambda^2)\left(\zeta^2-\frac{1}{\lambda^2}\right)} = \frac{1}{1+\varkappa}\int_1^\zeta\left(\frac{1}{\zeta^2-\lambda^2}+\frac{1}{(\lambda\zeta)^2-1}\right)d\zeta \\
\int_0^\tau \frac{2\tau\,d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)^3}\,(\tau^2-\varkappa^2)} &= -\frac{1}{1-\varkappa^2}\int_1^\zeta \frac{(1-\zeta^4)(1+\zeta^2)\,d\zeta}{\zeta^2(\zeta^2-\lambda^2)\left(\zeta^2-\frac{1}{\lambda^2}\right)} \\
&= \frac{1}{1-\varkappa^2}\left\{\zeta+\frac{1}{\zeta}-2+\frac{2}{1+\varkappa}\int_1^\zeta\left(\frac{1}{\zeta^2-\lambda^2}+\frac{1}{(\lambda\zeta)^2-1}\right)d\zeta\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (19).$$

Es ist zweckmäßig, das erste dieser drei Integrale noch etwas umzuformen. Es ist:

$$\int_1^\zeta \frac{\ln\zeta\,d\zeta}{\zeta^2-\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}\int_1^\zeta \frac{\ln\left(\frac{\zeta}{\lambda}\right)d\left(\frac{\zeta}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\zeta}{\lambda}\right)^2-1} + \ln\lambda\int_1^\zeta\frac{d\zeta}{\zeta^2-\lambda^2}, \qquad \int_1^\zeta \frac{\ln\zeta\,d\zeta}{(\zeta\lambda)^2-1} = \frac{1}{\lambda}\int_1^\zeta \frac{\ln(\zeta\lambda)\,d(\zeta\lambda)}{(\zeta\lambda)^2-1} - \ln\lambda\int_1^\zeta\frac{d\zeta}{(\lambda\zeta)^2-1}.$$

Setzt man jetzt (19) in (14a) ein und berücksichtigt (15) und (10b), so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
p+iq = iz - \frac{16\,d_1}{\pi^2}\int_1^\zeta\frac{\ln\zeta\,d\zeta}{1+\zeta^2} - \frac{8\,d_2}{\pi^2}\left\{\int_1^\zeta \frac{\ln\left(\frac{\zeta}{\lambda}\right)d\left(\frac{\zeta}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\zeta}{\lambda}\right)^2-1} + \int_1^\zeta\frac{\ln(\zeta\lambda)\,d(\zeta\lambda)}{1-(\zeta\lambda)^2}\right\} \\
-\frac{2\,d_1}{\pi}\,\frac{c}{1-\varkappa^2}\left\{\zeta+\frac{1}{\zeta}-2\right\}+p_0
\end{aligned}\right\} \quad (20).$$

Alle hierbei auftretenden Integrale sind im ganzen Bereich von 1 bis 0 konvergent. Um $p_\varkappa$ zu erhalten, setzen wir $\zeta = \lambda$ und werten die Integrale durch Reihenentwicklung aus. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
p_\varkappa = -y - \frac{4\,d_1}{\pi}\,\frac{c}{1-\varkappa^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\varkappa^2}}-1\right) + p_0 - \frac{16\,d_1}{\pi^2}\left\{\ln\lambda\operatorname{arctg}\lambda + \Sigma\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} - \Sigma\frac{(-1)^n\lambda^{2n+1}}{(2n+1)^2}\right\} \\
+ d_2 + \frac{8\,d_2}{\pi^2}\left\{\ln\lambda\left(\ln\frac{1+\lambda}{1-\lambda}+\ln\varkappa\right) + \Sigma\frac{(\lambda^2)^{2n+1}}{(2n+1)^2} - 2\,\Sigma\frac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)^2}\right\}.
\end{aligned}$$

Setzt man dies in (16) ein, so erhält man als erste Gleichung zwischen c und p_0:

$$\left.\begin{aligned}
p_0 = \frac{4\,d_1\,c}{\pi(1-\varkappa^2)}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\varkappa^2}}-1\right) + \frac{16\,d_1}{\pi^2}\left\{\ln\sqrt{\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}} + \Sigma\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\right. \\
\left.-\Sigma\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sqrt{\left(\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}\right)^{2n+1}}\right\} - \frac{8\,d_2}{\pi^2}\left\{\ln\sqrt{\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}}\cdot\ln\left(1+\sqrt{1-\varkappa^2}\right)\right. \\
\left.+\Sigma\left(\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}\right)^{2n+1}\frac{1}{(2n+1)^2} - 2\,\Sigma\sqrt{\left(\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}\right)^{2n+1}}\,\frac{1}{2n+1}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (21).$$

Um die Randbedingungen auf dem Stege zu erfüllen, haben wir die Integrationen bis $\zeta = i$ auszudehnen. Die Integrationen bis $\zeta = 0$ sind sofort auszuführen und ergeben:

$$\int_1^0 \frac{\ln\left(\frac{\zeta}{\lambda}\right) d\left(\frac{\zeta}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\zeta}{\lambda}\right)^2 - 1} + \int_1^0 \frac{\ln(\zeta\lambda)\, d(\zeta\lambda)}{1-(\zeta\lambda)^2} = -\left\{\frac{\pi^2}{4} + \ln\sqrt{\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}}\, \ln\frac{1+\sqrt{1-\varkappa^2}}{\varkappa}\right.$$

$$\left. - 2\sum\left(\sqrt{\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}}\right)^{2n+1}\frac{1}{(2n+1)^2}\right\}; \qquad \int_1^0 \frac{\ln\zeta\, d\zeta}{1+\zeta^2} = \sum\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

In dem Intervall von 0 bis $-i$ trennen wir Reelles und Imaginäres und erhalten mit der Substitution $i\zeta = \zeta'$

$$-\frac{4d_1}{\pi^2}\left\{4\int_0^{-i}\frac{\ln\zeta\,d\zeta}{1+\zeta^2} + \frac{2\sqrt{1-\varkappa^2}}{\varkappa}\left(\int_0^{-i}\frac{\ln\left(\frac{\zeta}{\lambda}\right) d\left(\frac{\zeta}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\zeta}{\lambda}\right)^2-1} + \int_0^{-i}\frac{\ln(\zeta\lambda)\,d(\zeta\lambda)}{1-(\zeta\lambda)^2}\right)\right\}$$

$$= \frac{2d_1 i}{\pi}\left\{4\int_0^{-i}\frac{d\zeta}{1+\zeta^2} + \frac{2\sqrt{1-\varkappa^2}}{\varkappa}\left(\int_0^{-i}\frac{d\left(\frac{\zeta}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\zeta}{\lambda}\right)^2-1} + \int_0^{-i}\frac{d(\zeta\lambda)}{1-(\zeta\lambda)^2}\right)\right\}$$

$$-\frac{4id_1}{\pi^2}\left\{-4\int_0^1\frac{\ln\zeta'\, d\zeta'}{1-\zeta'^2} + \frac{2\sqrt{1-\varkappa^2}}{\varkappa}\left(\int_0^1\frac{\ln\left(\frac{\zeta'}{\lambda}\right)d\left(\frac{\zeta'}{\lambda}\right)}{1+\left(\frac{\zeta'}{\lambda}\right)^2} - \int_0^1\frac{\ln(\zeta'\lambda)\,d(\zeta'\lambda)}{1+(\zeta'\lambda)^2}\right)\right\}.$$

Die erste geschweifte Klammer einschließlich des Faktors $\frac{2d_1 i}{\pi}$ gibt, wie man sich leicht überzeugt, gerade $-2i(z - d_1 - i d_2)$; in der zweiten Klammer wird das erste Integral genau wie oben $-\pi^2/8$, das zweite und dritte geben zusammen Null. Somit wird:

$$(p + i q)_\infty = -iz - \frac{16 d_1}{\pi^2}\sum\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} + \frac{8d_2}{\pi^2}\left\{\ln\sqrt{\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}}\,\ln\frac{1+\sqrt{1-\varkappa^2}}{\varkappa}\right.$$

$$\left. - 2\sum\left(\sqrt{\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}}\right)^{2n+1}\frac{1}{(2n+1)^2}\right\} + \frac{4d_1 c}{\pi(1-\varkappa^2)} + p_0 .$$

Da $q_\infty = -x$ wird, ist die Gl. (17) identisch erfüllt, liefert also, wie oben schon bemerkt wurde, keine neue Gleichung für c und p_0. Damit $p = y$ wird, muß sein:

$$p_0 + \frac{4d_1 c}{\pi(1-\varkappa^2)} = \frac{16 d_1}{\pi^2}\sum\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} - \frac{8d_2}{\pi^2}\left\{\ln\sqrt{\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}}\,\ln\frac{1+\sqrt{1-\varkappa^2}}{\varkappa}\right.$$

$$\left. - 2\sum\left(\sqrt{\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}}\right)^{2n+1}\frac{1}{(2n+1)^2}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22).$$

Somit sind alle Randbedingungen erfüllt, wenn b, c und p_0 aus den Gl. (15), (21) und (22) bestimmt werden. Für die Auflösung müssen allerdings erst die in diesen Gleichungen auftretenden Reihen summiert werden, was für die drei Fälle $\frac{d_1}{d_2} = 1/4;\ 3/8;\ 1/2$ ausgeführt wurde. Es ergab sich dabei:

$d_1 : d_2$	b	c	$p_0 : d_2$
$1/4$	5,8921	3,3482	1,03896
$3/8$	3,6429	2,1080	1,11378
$1/2$	2,6324	1,4914	1,17054

Da für $\frac{d_1}{d_2} = 0$ der T-Träger in einen Parallelstreifen ausartet, und für diesen $p_0 = d_2$ ist, so sieht man, daß für einen Steg, der halb so breit wie der Flansch ist, $\left(\frac{d_1}{d_2} = 1/4\right)$ die maximale Schubspannung (natürlich ohne Rücksicht auf die Singularität in den Ecken), um noch nicht 4 % von der des Parallelstreifens abweicht, bei einem Verhältnis von

Stegbreite zu Flanschbreite von 1 : 1 aber bereits um 17 %. Die in der Technik übliche Näherungsformel [1]):

$$\frac{\tau_{max}}{G\,\vartheta} = d_{max} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (23),$$

wobei d_{max} die größte Breite des Trägers bedeutet, liefert also im ersten Falle einen guten Näherungswert; im zweiten dagegen beträgt der Fehler, um den die Spannung zu niedrig berechnet wird, 17 %, ist also keineswegs mehr zu vernachlässigen.

B) Der Drillungswiderstand von **L**-, **U**- und **Z**-Eisen.

5. Begründung der Formel. Bekanntlich ist der Zusammenhang zwischen äußerem Moment und Verdrehungswinkel für irgend ein Profil gegeben durch

$$\vartheta = \frac{M}{J\,G} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (24),$$

wobei mit J der Drillungswiderstand bezeichnet wird. Ferner gilt [2])

$$M = 2 \cdot \iint F\,dx\,dy \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (25),$$

wobei das Integral über den gesamten Querschnitt zu erstrecken ist. Setzt man $F^* = \frac{F}{G\,\vartheta}$, so erhält man aus (24) und (25):

$$J = 2 \iint F^*\,dx\,dy \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (26).$$

Aus diesen Beziehungen hat Föppl eine Näherungsformel für Walzeisenprofile abgeleitet, zu deren Aufstellung das bekannte Seifenhautgleichnis benutzt wurde. Denkt man sich den Querschnitt (Abb. 2a) in einzelne Rechtecke von der Länge l_i und der Breite d_i zerlegt, so wird natürlich die Summe der Volumina der »Spannungshügel« über den einzelnen Rechtecken kleiner sein wie das Volumen des Hügels über dem unzerlegten Querschnitt. Denn während bei dem unzerteilten Querschnitt der Spannungshügel durchläuft, werden durch die Zerlegung Talfurchen in den Hügel eingeschnitten, die bis zum Hügelfuße herabreichen. Setzt man also den Drillungswiderstand des ganzen Profiles gleich der Summe der Drillungswiderstände der einzelnen Rechtecke, so wird der Drillungswiderstand des Profiles zweifellos zu klein angegeben. Benutzt man nun aber für den Drillungswiderstand des Einzelrechtecks wiederum nur einen Näherungswert, der sicher zu groß ist, so wird der Fehler sich etwas kompensieren, und man gelangt so zu folgender Näherungsformel für den Drillungswiderstand von Walzeisenprofilen, die sich aus schmalen Rechtecken zusammensetzen [3]):

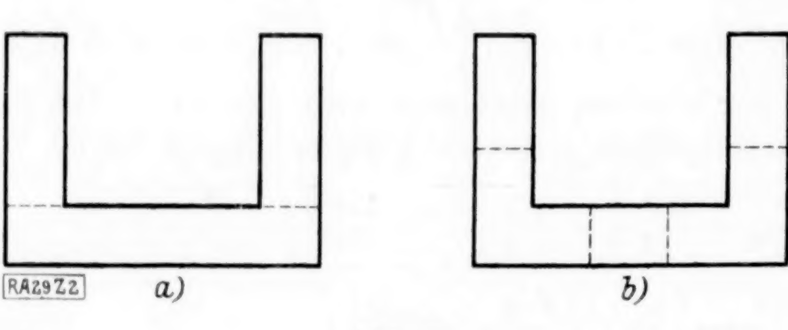


Abb. 2.

$$J = \frac{1}{3} \Sigma\, l_i\, d_i^3 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (27).$$

Bei dieser Formel bleibt allerdings zweifelhaft, ob J zu groß oder zu klein berechnet wird. Es erscheint daher zweckmäßig, einen genauen Wert von J für eine Gruppe von Profilen zu berechnen, was im folgenden für **U**-, **Z**- und **L**-Eisen von überall gleicher Dicke geschehen soll. Zwar wird auch an dieser Stelle keine exakte Formel abgeleitet, wohl aber eine sehr viel genauere wie (27), für die außerdem eine Abschätzung des Fehlers gegeben werden kann. Zu ihrer Aufstellung führt die folgende Ueberlegung: Wir denken uns den Querschnitt, etwa ein **U**-Eisen (Abb. 2b), in zwei Winkeleisen, zwei Halbstreifen und ein Stück eines Parallelstreifens zerlegt, und berechnen von jedem Teil den Drillungswiderstand so, als ob er sich über die Schnittlinien hinaus ins Unendliche erstreckte. Dadurch wird das Herunterziehen der Einzelhügel bis zum Hügelfuße vermieden und somit der Hauptfehler der Föpplschen Formel beseitigt. Weiterhin fragt

[1]) Föppl, a. a. O. Bd. II, S. 79, Gl. (62).
[2]) a. a. o. Bd. II, S. 68, Gl. (50).
[3]) a. a. o. Bd. II, S. 76, Gl. (59).

sich natürlich, ob an den Ansatzstellen die einzelnen Stücke glatt aneinanderpassen, sich also an diesen Stellen für die Winkeleisen bzw. Halbstreifen schon die Spannungsverteilung des Parallelstreifens eingestellt hat, und schließlich, ob auch für das ursprünglich gegebene **U**-Eisen das letztere gilt. Der Untersuchung dieser Frage wollen wir uns zunächst zuwenden, wobei wir uns kurz fassen können, da der Gedankengang im wesentlichen derselbe wie beim T-Träger ist.

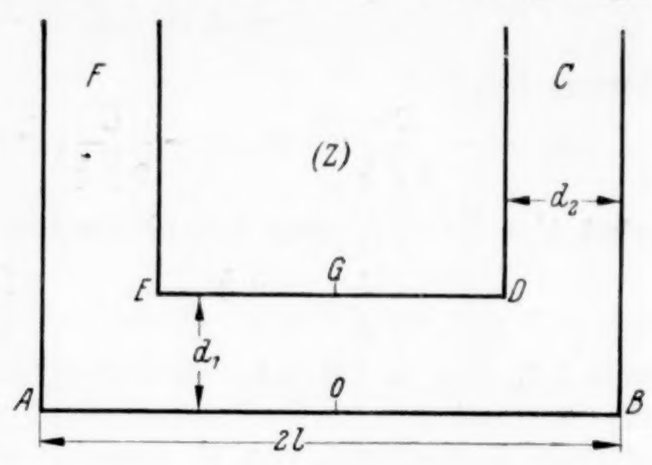


Abb. 3.

6. Abbildung der z- und $s+it$-Ebene. Die Abbildung (Abb. 3) der z-Ebene auf die τ-Ebene sei so normiert, daß die Ecke B in $\tau = \varkappa < 1$, die Ecke C in $\tau = +1$, die Ecke D in $\tau = \varkappa' > 1$ übergeht. Dann geht aus Symmetriegründen A in $\tau = -\varkappa$, F in $\tau = -1$ und E in $\tau = -\varkappa'$ über. Außerdem möge das Koordinatensystem der z-Ebene so orientiert sein, daß $\tau = 0$ den Punkt O liefert. Dann geht G in $\tau = \infty$ über. Somit wird:

$$z = C\int_0^{\tau} \frac{\sqrt{\tau^2-\varkappa'^2}}{\sqrt{(\tau^2-\varkappa^2)(\tau^2-1)}}\,d\tau \quad . \quad . \quad (28).$$

In dem Intervall $0 < |\tau| < \varkappa$ setzen wir $\tau = \varkappa \sin\varphi$ und erhalten:

$$z = -C\int_0^{\varphi} \frac{\sqrt{\varkappa'^2-\varkappa^2\sin^2\varphi}\,d\varphi}{1-\varkappa^2\sin^2\varphi} = -C\left\{\frac{\varkappa'^2-1}{\varkappa'}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1-\varkappa^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-(\varkappa/\varkappa')^2\sin^2\varphi}}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\varkappa'}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-(\varkappa/\varkappa')^2\sin^2\varphi}}\right\}.$$

Das erste Integral ist ein elliptisches Normalintegral III. Gattung, das zweite ein Normalintegral I. Gattung. Wir werden nachher sehen, daß wir gerade die gewünschten Profile erhalten, wenn wir $\varkappa' = 1/\varkappa$ setzen und $\varkappa^2 = k < 1$. Mit dieser Substitution wird:

$$z = -C\sqrt{k}\left\{\frac{1-k}{k}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1-k\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right\} \quad . \quad . \quad (28\,\mathrm{a}).$$

Nun ist, wie man leicht durch Differentiation bestätigt,

$$2\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1-k\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + \frac{1}{1-k}\operatorname{arc\,tg}\frac{(1-k)\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Als erste Bestimmungsgleichung für C und k erhält man also:

$$l = -C\sqrt{k}\left\{\frac{1+k}{2k}K(k) + \frac{\pi}{4k}\right\},$$

wobei $K(k)$ das vollständige elliptische Normalintegral I. Gattung mit dem Modul k bedeutet. Läuft τ von $\varkappa$ bis $\varkappa'$, so bewegt sich φ in dem Bereich von $\pi/2$ bis $\pi/2 + i\varphi'$. Man erhält:

$$z - l = -i\,C\sqrt{k}\left\{\frac{1+k}{2k}\int_0^{\varphi'}\frac{d\varphi'}{\sqrt{1-k^2\operatorname{Cos}^2\varphi'}} + \frac{1}{4k}\ln\frac{(1-k)\operatorname{Ctg}\varphi' + \sqrt{1-k^2\operatorname{Cos}^2\varphi'}}{(1-k)\operatorname{Ctg}\varphi' - \sqrt{1-k^2\operatorname{Cos}^2\varphi'}}\right\}.$$

Der Ausdruck unter dem Logarithmus ist immer positiv in dem ganzen Intervall von $\varkappa$ bis $\varkappa'$. Nähert sich τ dem Punkte 1, so geht $k\operatorname{Cos}^2\varphi'$ gegen 1. Setzt man $k\operatorname{Cos}^2\varphi' = 1 - \varepsilon$, so verhält sich der Ausdruck unter dem Logarithmus wie $1/\varepsilon^2$, wie man durch elementare Reihenentwicklungen leicht feststellt, der Logarithmus selbst also wie $-\ln(\varepsilon^2)$ Lassen wir also τ einen kleinen Halbkreis um 1 beschreiben, so nimmt der Logarithmus um $2\pi i$ zu und bewegt sich für weiter wachsendes τ auf der unteren Seite der reellen Achse weiter; z muß dabei um d_1 abnehmen. Substituieren wir in dem

ersten Integral $k \,\mathfrak{Sin}\, \varphi' = \sqrt{1-k^2}\cos\psi$ und lassen τ in $\varkappa'$ hineinrücken, so erhalten wir, da der Logarithmus an beiden Grenzen verschwindet:

$$-d_1 + i\,d_2 = -\,i\,C\sqrt{k}\left\{\frac{1+k}{2\,k}K(k') + \frac{i\,\pi}{2\,k}\right\}.$$

Hieraus folgt

$$d_1 = -\frac{C\pi}{2\sqrt{k}};\quad d_2 = -\frac{C}{2\sqrt{k}}(1+k)\,K(k');\quad \frac{2\,l-d_1}{2} = -\frac{C}{2\sqrt{k}}(1+k)\,K(k),$$

wobei $k' = \sqrt{1-k^2}$ den komplementären Modul bedeutet. Weiter erhält man hieraus

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{1+k}{\pi}K(k');\quad \frac{2\,l-d_1}{2\,d_1} = \frac{1+k}{\pi}K(k);\quad \frac{C}{d_1} = -\frac{2\sqrt{k}}{\pi}\quad . \quad . \quad . \quad (29).$$

Läuft l/d_1 von ∞ bis 2,5, so weicht der Quotient d_2/d_1 in diesem ganzen Gebiet innerhalb der ersten vier Dezimalen nicht von der Einheit ab, so daß wir mit der oben getroffenen Festlegung von $\varkappa'$ gerade die uns hier interessierenden Profile erfaßt haben. Für den oben genannten Bereich von l/d_1 läuft k von 1 bis 0,9848, $\varkappa$ also von 1 bis 0,9924. Für die in Frage kommenden Profile ist $\varkappa$ also sehr wenig von 1 verschieden, was die folgenden Rechnungen sehr vereinfacht.

Gl. (9a) ergibt für $s+it$:

$$s+it = a_0\ln(\tau-\varkappa) + a_1\ln(\tau+\varkappa) + a_2\ln(\tau-\varkappa') + a_3\ln(\tau+\varkappa')$$
$$+\frac{b_1}{\tau-\varkappa'} + \frac{b_2}{\tau+\varkappa'} + \frac{c_1}{(\tau-\varkappa')^2} + \frac{c_2}{(\tau+\varkappa')^2} + A + i\,B\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30),$$

was sich durch dieselbe Schlußweise wie in Abschnitt **2** vereinfacht zu:

$$s+it = \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\tau-\varkappa}{\tau+\varkappa}\,\frac{\varkappa\tau+1}{\varkappa\tau-1}\right) + \frac{b\,\tau}{(\tau\,\varkappa)^2-1} + \frac{2\,c\,\tau}{((\varkappa\,\tau)^2-1)^2} + i\quad . \quad . \quad (30\,a).$$

7. Bestimmung von $p+iq$. Durch Integration nach z erhält man aus (30a) wegen

$$d\,z = \frac{2\,d_1}{\pi}\,\frac{\sqrt{1-\varkappa^2\tau^2}}{\sqrt{\varkappa^2-\tau^2}}\,\frac{d\,\tau}{1-\tau^2}\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

$$p+iq = p_0 + i\,z + \frac{4\,d_1}{\pi^2}\int_0^\tau \ln\left(\frac{\varkappa-\tau}{\varkappa+\tau}\,\frac{1+\varkappa\tau}{1-\varkappa\tau}\right)\sqrt{\frac{1-\varkappa^2\tau^2}{\varkappa^2-\tau^2}}\,\frac{d\,\tau}{1-\tau^2} -$$
$$-\frac{2\,d_1 b}{\pi}\int_0^\tau \frac{\tau\,d\,\tau}{\sqrt{(\varkappa^2-\tau^2)(1-\varkappa^2\tau^2)}\,(1-\tau^2)} + \frac{4\,d_1 c}{\pi}\int_0^\tau \frac{\tau\,d\,\tau}{\sqrt{(\varkappa^2-\tau^2)(1-\varkappa^2\tau^2)^3}\,(1-\tau^2)}\quad (32).$$

Hier gelingt es natürlich im Gegensatz zum T-Träger nicht mehr, alle Integrale rational zu machen, da sich z durch ein elliptisches Integral ausdrückt. Das zweite und dritte Integral ist elementar. Durch die Substitution:

$$\frac{\varkappa^2-\tau^2}{1-\varkappa^2\tau^2} = \left(\frac{\zeta}{\varkappa}\right)^2;\quad \varkappa^2\tau^2 = \frac{\varkappa^4-\zeta^2}{1-\zeta^2}$$

erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\tau \frac{\tau\,d\,\tau}{\sqrt{(\varkappa^2-\tau^2)(1-\varkappa^2\tau^2)}\,(1-\tau^2)} &= -\frac{\varkappa^2}{1-\varkappa^2}\int_{\varkappa^2}^{\zeta}\frac{d\,\zeta}{\varkappa^2+\zeta^2}\\ \int_0^\tau \frac{\tau\,d\,\tau}{\sqrt{(\varkappa^2-\tau^2)(1-\varkappa^2\tau^2)^3}\,(1-\tau^2)} &= -\frac{\varkappa^2}{(1-\varkappa^2)^2}\int_{\varkappa^2}^{\zeta}\frac{d\zeta}{\varkappa^2+\zeta^2} + \frac{\varkappa^2}{(1-\varkappa^2)^2\,(1+\varkappa^2)}(\zeta-\varkappa^2)\end{aligned}\right\}\quad . \quad . \quad . \quad (33).$$

Für $\tau \to 1$ haben wir endlich bleibende Spannungen zu verlangen; eine partielle Integration liefert genau wie oben als erste Gleichung für b und c:

$$b - \frac{2c}{1-\varkappa^2} = 0\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34),$$

so daß wegen (33) und (34) sich $p+iq$ reduziert auf:

$$p+iq = p_0 + i\,z + \frac{4\,d_1}{\pi^2}\int_0^\tau \ln\left(\frac{\varkappa-\tau}{\varkappa+\tau}\,\frac{1+\varkappa\tau}{1-\varkappa\tau}\right)\sqrt{\frac{1-\varkappa^2\tau^2}{\varkappa^2-\tau^2}}\,\frac{d\tau}{1-\tau^2} + \frac{4\,d_1 c}{\pi}\left(\varkappa\sqrt{\frac{\varkappa^2-\tau^2}{1-\varkappa^2\tau^2}} - \varkappa^2\right)\ (35).$$

Für $0 < \tau < \varkappa$ muß $q = x$ sein, was (35) erfüllt; für $\tau \to \varkappa$ müssen die Spannungen verschwinden, also $p = 0$ werden, so daß:

$$p_0 + \frac{4\,d_1}{\pi^2} \int\limits_0^{\varkappa} \ln\left(\frac{\varkappa - \tau}{\varkappa + \tau}\,\frac{1 + \varkappa\tau}{1 - \varkappa\tau}\right) \sqrt{\frac{1 - \varkappa^2\tau^2}{\varkappa^2 - \tau^2}}\,\frac{d\tau}{1 - \tau^2} - \frac{4\,d_1 c}{\pi}\,\varkappa^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

wird. Also ist für $\varkappa < \tau < \varkappa'$

$$p + iq = -iz + \frac{4\,d_1 c}{\pi^2} \int\limits_{\varkappa}^{\tau} \ln\left(\frac{\tau - \varkappa}{\tau + \varkappa}\,\frac{1 + \varkappa\tau}{1 - \varkappa\tau}\right) \sqrt{\frac{1 - \varkappa^2\tau^2}{\tau^2 - \varkappa^2}}\,\frac{d\tau}{1 - \tau^2} - \frac{4\,i d_1 c\varkappa}{\pi} \sqrt{\frac{\tau^2 - \varkappa^2}{1 - \varkappa^2\tau^2}} + 2\,il \quad (37).$$

Jetzt muß $p = y$ sein, was unsere Gleichung bereits erfüllt; ferner muß für $\tau \to 1$ infolge von

$$\int\limits_{l - d_1}^{l} q_1\,dx = \frac{2\,l d_1 - d_1^2}{2}$$

$$\frac{4}{\pi^2} \int\limits_{\varkappa}^{1} \ln\left(\frac{\tau - \varkappa}{\tau + \varkappa}\,\frac{1 + \varkappa\tau}{1 - \varkappa\tau}\right) \sqrt{\frac{1 - \varkappa^2\tau^2}{\tau^2 - \varkappa^2}}\,\frac{d\tau}{1 - \tau^2} - \frac{4 c\varkappa}{\pi} = -1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

sein. Auch für $1 < \tau < \varkappa'$ bleibt $p = y$, da der Umlauf um $\tau = 1$ keinen Beitrag liefert. Für $|\tau| > 1$ geht (37) über in

$$p + iq = +iz + 2\,id_1 - 2\,d_2 + \frac{4\,d_1}{\pi^2} \left\{ \int\limits_{1/\varkappa}^{\tau} \ln\left(\frac{\tau - \varkappa}{\tau + \varkappa}\,\frac{\varkappa\tau + 1}{\varkappa\tau - 1}\right) \sqrt{\frac{\varkappa^2\tau^2 - 1}{\tau^2 - \varkappa^2}}\,\frac{d\tau}{1 - \tau^2} + \right.$$

$$\left. + i \int\limits_{\varkappa}^{1/\varkappa} \ln\left(\frac{\tau - \varkappa}{\tau + \varkappa}\,\frac{1 + \varkappa\tau}{1 - \varkappa\tau}\right) \sqrt{\frac{1 - \varkappa^2\tau^2}{\tau^2 - \varkappa^2}} \cdot \frac{d\tau}{1 - \tau^2} \right\} + \frac{4\,d_1 c\varkappa}{\pi} \sqrt{\frac{\tau^2 - \varkappa^2}{\varkappa^2\tau^2 - 1}}\,.$$

Da $q = x$ werden soll, muß das zweite Integral $-\pi^2/2$ ergeben. Um das zu zeigen, schreiben wir das Integral:

$$\int\limits_{\varkappa}^{1/\varkappa} \ln\left(\frac{\tau - \varkappa}{1 - \varkappa\tau}\right) \sqrt{\frac{1 - \varkappa\tau}{\tau - \varkappa}}\,\frac{d\tau}{1 - \tau^2} + \int\limits_{\varkappa}^{1/\varkappa} \ln\left(\frac{1 + \varkappa\tau}{\tau + \varkappa}\right) \sqrt{\frac{1 - \varkappa^2\tau^2}{\tau^2 - \varkappa^2}}\,\frac{d\tau}{1 - \tau^2} +$$

$$+ \int\limits_{\varkappa}^{1/\varkappa} \ln\left(\frac{\tau - \varkappa}{1 - \varkappa\tau}\right) \sqrt{\frac{1 - \varkappa\tau}{\tau - \varkappa}} \left(\sqrt{\frac{1 + \varkappa\tau}{\tau + \varkappa}} - 1\right) \frac{d\tau}{1 - \tau^2}\,.$$

Hierin ist das zweite und dritte Integral gegenüber dem ersten von der Größenordnung $1 - \varkappa$. Das erste Integral geht mit der Substitution

$$\frac{1 - \varkappa\tau}{\tau - \varkappa} = \zeta^2, \qquad \tau = \frac{1 + \varkappa\zeta^2}{\varkappa + \zeta^2}$$

über in

$$4 \int\limits_0^{\infty} \ln\zeta \cdot \frac{\zeta^2\,d\zeta}{1 - \zeta^4} = 4 \int\limits_0^1 \frac{\ln\zeta\,d\zeta}{1 - \zeta^2} = -\frac{\pi^2}{2}\,.$$

Auf den umständlichen Nachweis, daß die beiden übrigen Integrale die Summe Null ergeben, wollen wir hier verzichten, da das von vornherein plausibel ist. Um c und p_0 zu bestimmen, bleiben noch die in (36) und (38) auftretenden Integrale zu berechnen. Dabei wollen wir uns auf die erste Näherung beschränken, also Integrale von der Größenordnung $1 - \varkappa$ vernachlässigen. Dann ergibt das Integral in (38) mit der eben benutzten Substitution

$$4 \int\limits_0^1 \frac{\ln\zeta\,d\zeta}{1 - \zeta^4} = -4\,\Sigma\,\frac{1}{(4\,n + 1)^2}\,.$$

Ebenso ergibt das in (36) auftretende Integral:

$$4 \int\limits_0^{\varkappa} \frac{\ln\zeta\,d\zeta}{1 - \zeta^4} \sim -4\,\Sigma\,\frac{1}{(4\,n + 1)^2}\,.$$

Somit wird bis auf Terme in $(1 - \varkappa)$ $\quad p_0 = d_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39).$

Es besteht also tatsächlich in der Mitte des **U**-Eisens im wesentlichen die Spannungsverteilung des Parallelstreifens, so daß wir erwarten können, auf dem oben angegebenen Wege einen zuverlässigen Wert für den Drillungswiderstand zu erhalten. In den folgenden Paragraphen werden wir nun die Drillungswiderstände der einzelnen Bestandteile des Profiles berechnen.

8. Der Drillungswiderstand des Parallelstreifens und des Halbstreifens von der Breite 1. Für den Parallelstreifen ergibt eine ganz einfache Rechnung:

$$w = z + \frac{iz^2}{2}; \quad \psi = y + \frac{x^2 - y^2}{2}; \quad \frac{F}{G\vartheta} = y(1-y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40).$$

Somit wir für ein Stück von der Länge l

$$J = 2\int_0^l \frac{F}{G\vartheta}\,dx\,dy = 2l\int_0^1 y(1-y)\,dy = \frac{l}{3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41).$$

In (27) ist also der Drillungswiderstand eines Rechtecks ersetzt durch den eines gleichlangen Stückes eines Parallelstreifens.

Für den Halbstreifen (Abb. 4) erhält man:

$$z = C\int_0^\tau \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}\,(1-\tau)} = \frac{1}{\pi}\ln\frac{1+\sqrt{\tau}}{1-\sqrt{\tau}}; \quad \tau = \mathfrak{Tg}^2\frac{\pi z}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42),$$

$$s + it = -\frac{2}{\pi}\ln\tau + i = -\frac{4}{\pi}\ln\frac{1-e^{-\pi z}}{1+e^{-\pi z}} + i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

durch Reihenentwicklung ergibt sich daraus:

$$\left.\begin{aligned} (s+it) &\equiv \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{8}{\pi}\sum\frac{e^{-(2n+1)\pi z}}{2n+1} + i \\ \frac{dw}{dz} &= -\frac{8}{\pi^2}\sum\frac{e^{-(2n+1)\pi z}}{(2n+1)^2} + iz + 1 \\ w &= z + \frac{iz^2}{2} + \frac{8}{\pi^3}\sum\frac{e^{-(2n+1)\pi z}}{(2n+1)^3} - \frac{8}{\pi^3}\sum\frac{1}{(2n+1)^3} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44).$$

Also folgt nach (3):

$$\frac{F}{G\vartheta} = y(1-y) - \frac{8}{\pi^3}\sum\frac{e^{-(2n+1)\pi x}\sin(2n+1)\pi y}{(2n+1)^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

und damit für einen Streifen von der Länge l:

$$J = \frac{l}{3} - \frac{32}{\pi^5}\sum\frac{1-e^{-(2n+1)\pi l}}{(2n+1)^5}; \quad \sum\frac{1}{(2n+1)^5} = 1{,}00452 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46).$$

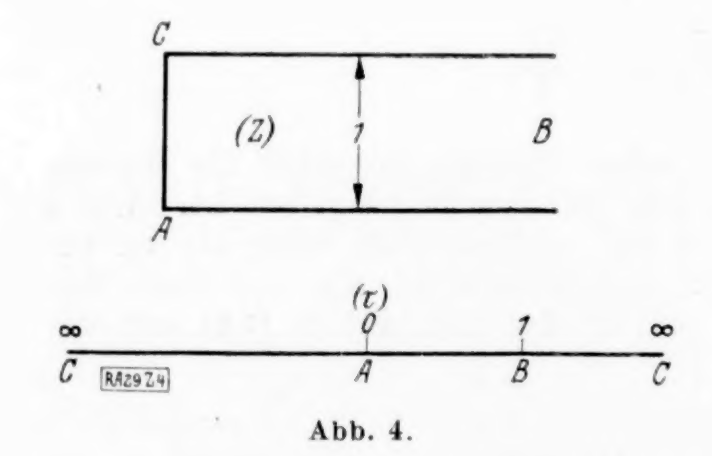


Abb. 4.

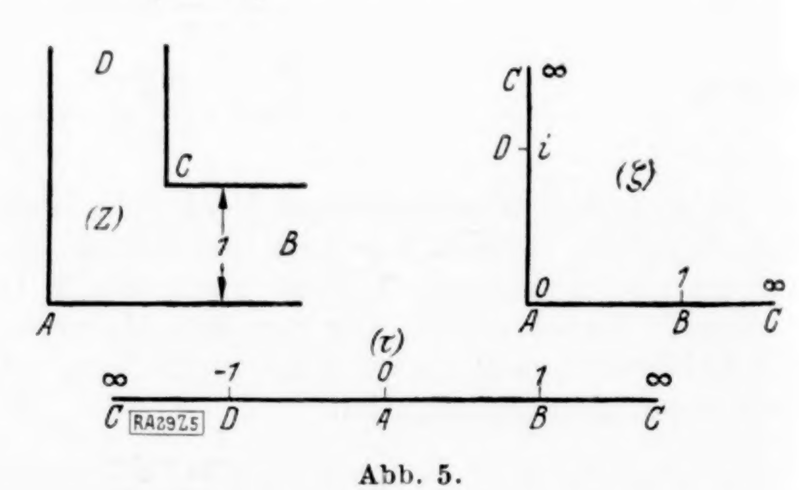


Abb. 5.

9. Der Drillungswiderstand eines Winkeleisens mit unendlich langen Schenkeln von der Breite 1. Aus der Abb. 5 und Gl. (8) und (9) ergeben sich unmittelbar die Abbildungsgleichungen:

$$z = \frac{2}{\pi}\int_0^\tau \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}\,(1-\tau^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47); \qquad s + it = \int_0^\tau \frac{R(\tau)\,d\tau}{\tau} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48).$$

$R(\tau)$ ist dabei eine quadratische Funktion, da sie ja allgemein vom Grade $2n-6$ ist und die lineare Transformation, die die Ecke C ins Unendliche schafft, ihren Grad nicht ändert[1]). Somit wird:

$$z = \frac{1}{\pi}\left\{\ln\frac{\sqrt{\tau}+1}{\sqrt{\tau}-1} + \ln\frac{\sqrt{\tau}+i}{\sqrt{\tau}-i} + (1+i)\,\pi\right\} \quad \ldots\ldots \quad (47\text{a}).$$

$$s + it = A + i - \frac{2}{\pi}\ln\tau + c_1\,\tau + c_2\,\tau^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (48\text{a}).$$

Die Konstante c_1 verschwindet aus Symmetriegründen, da offenbar $(s)_{\tau>0} = (s)_{\tau<0}$ sein muß. Setzen wir noch $A = -c_2 + A_1$, so wird:

$$p + iq = (A_1 + i)\,z - \frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^{\tau}\frac{\ln\tau\,d\tau}{\sqrt{\tau}\,(1-\tau^2)} - \frac{4c_2}{\pi}\sqrt{\tau} \quad \ldots\ldots \quad (49),$$

da für $\tau > 0$ $q = x$ sein muß, verschwindet A_1 und man erhält:

$$p_\infty = -y - \frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^{1}\frac{\ln\tau\,d\tau}{\sqrt{\tau}\,(1-\tau^2)} - \frac{4c_2}{\pi}$$

Geht man durch $\zeta = \sqrt{\tau}$ zu der ζ-Ebene über, so wird

$$c = 0{,}58312 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (50),$$

wenn man berücksichtigt, daß

$$\frac{16}{\pi^2}\int\limits_0^1\frac{\ln\zeta\,d\zeta}{1-\zeta^4} = -\frac{16}{\pi^2}\,\Sigma\,\frac{1}{(4n+1)^2} = -1{,}74244$$

und

$$\int\limits_0^1 p_\infty\,dy = \psi_{OF} - \psi_{UF} = {}^1\!/_2.$$

Also ist in ζ geschrieben:

$$z = \frac{1}{\pi}\left\{\ln\left(\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right) + i\pi\right\} + \frac{i}{\pi}\left\{\ln\frac{\zeta+i}{\zeta-i} - i\pi\right\} \quad \ldots\ldots \quad (51),$$

$$p + iq = iz - \frac{16}{\pi^2}\int\frac{\ln\zeta\,d\zeta}{1-\zeta^4} - 0{,}74244\,\zeta \quad \ldots\ldots \quad (52).$$

Um die Spannungsfunktion aufzustellen, muß man (52) nach z integrieren. Es empfiehlt sich, diese Integration nicht in voller Allgemeinheit durchzuführen, sondern spezielle Integrationswege in der ζ-Ebene zu wählen, für die die Rechnung möglichst einfach wird. Wir unterscheiden zwei Fälle.

I. Der Integrationsweg verläuft innerhalb des Einheitskreises der ζ-Ebene ($r < 1$). Zur Berechnung von $p + iq$ zerlegen wir das Integral in zwei Teile, indem wir zuerst entlang der reellen Achse bis $r = r_0$ integrieren, dann entlang des Kreises $r = r_0$ von 0 bis ϑ. Da die Gerade $\vartheta = \pi/4$ eine Symmetrielinie ist, der in der z-Ebene die Verbindungslinie der beiden Ecken A und C entspricht, genügt es, bis zu diesem Wert von ϑ zu gehen. Zerlegt man in Real- und Imaginärteil, so wird mit $\zeta = r e^{i\vartheta}$ entlang $r = r_0$:

$$\frac{d\zeta}{1-\zeta^4} = \frac{i r e^{i\vartheta}\,d\vartheta}{1 - r^4 e^{4i\vartheta}} = \left(i\,\Sigma\,r^{4n+1}\cos(4n+1)\,\vartheta - \Sigma\,r^{4n+1}\sin(4n+1)\,\vartheta\right)d\vartheta \quad (53).$$

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_0^{\vartheta}\frac{\ln\zeta\,d\zeta}{1-\zeta^4} = \Bigg[&\Big\{\ln r\,\Sigma\,\frac{r^{4n+1}}{4n+1}\cos(4n+1)\,\vartheta - \vartheta\,\Sigma\,\frac{r^{4n+1}}{4n+1}\sin(4n+1)\,\vartheta \\ &- \Sigma\,\frac{r^{4n+1}}{(4n+1)^2}\cos(4n+1)\,\vartheta\Big\} + i\Big\{\ln r\,\Sigma\,\frac{r^{4n+1}}{4n+1}\sin(4n+1)\,\vartheta \\ &+ \vartheta\,\Sigma\,\frac{r^{4n+1}}{4n+1}\cos(4n+1)\,\vartheta - \Sigma\,\frac{r^{4n+1}}{(4n+1)^2}\sin(4n+1)\,\vartheta\Big\}\Bigg] \\ &- \Big\{\ln r\,\Sigma\,\frac{r^{4n+1}}{4n+1} - \Sigma\,\frac{r^{4n+1}}{(4n+1)^2}\Big\}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (54).$$

[1]) Trefftz, a. a. O. S. 106.

Der letzte Term ist gerade $-\int_0^r \frac{\ln r\,dr}{1-r^4}$, hebt sich also gegen den ersten Teil des Integrals weg. Somit erhält man mit den Abkürzungen:

$$\Sigma \frac{r^{4n+1}}{4n+1}\begin{Bmatrix}\sin(4n+1)\vartheta\\ \cos(4n+1)\vartheta\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\varphi\\ \psi\end{Bmatrix}; \quad \Sigma \frac{r^{4n+1}}{(4n+1)^2}\begin{Bmatrix}\sin(4n+1)\vartheta\\ \cos(4n+1)\vartheta\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\Phi\\ \Psi\end{Bmatrix} \quad (55).$$

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial F^*}{\partial x} &= (x-q) = 0{,}74244\, r\sin\vartheta + \frac{16}{\pi^2}\{\varphi\ln r + \psi\vartheta - \Phi\}\\ -\frac{\partial F^*}{\partial y} &= (y-p) = 2y + 0{,}74244\, r\cos\vartheta + \frac{16}{\pi^2}\{\psi\ln r - \varphi\vartheta - \Psi\}\end{aligned}\right\} \quad (56).$$

Aus Gl. (53) und (56) folgt noch:

$$\frac{\partial x}{\partial\vartheta} = \frac{4}{\pi}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} = \frac{4}{\pi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\vartheta^2}; \quad \frac{\partial y}{\partial\vartheta} = \frac{4}{\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} = -\frac{4}{\pi}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\vartheta^2}; \quad x = \frac{4}{\pi}\psi, \quad y = \frac{4}{\pi}\varphi,$$

also wird

$$-\frac{\partial F^*}{\partial\vartheta} = 0{,}74244\left(r\sin\vartheta\frac{\partial x}{\partial\vartheta} + r\cos\vartheta\frac{\partial y}{\partial\vartheta}\right) + \frac{4}{\pi}\left\{\ln r\left(y\frac{\partial x}{\partial\vartheta} + x\frac{\partial y}{\partial\vartheta}\right)\right.$$
$$\left. + \vartheta\left(x\frac{\partial x}{\partial\vartheta} - y\frac{\partial y}{\partial\vartheta}\right)\right\} + 2y\frac{\partial y}{\partial\vartheta} - \frac{64}{\pi^3}\left(\Phi\frac{\partial^2\Phi}{\partial\vartheta^2} - \Psi\frac{\partial^2\Psi}{\partial\vartheta^2}\right)$$

und durch Integration nach ϑ:

$$-F^* = y^2 + \frac{0.74244}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{2r^2\sin 2\vartheta}{1-r^4} + \frac{4}{\pi}\left\{xy\ln r\right.$$
$$\left. + \frac{\vartheta}{2}(x^2-y^2) + {}^1/_2\int(x^2-y^2)\,d\vartheta - \frac{16}{\pi^2}\left(\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} - \Psi\frac{\partial\Psi}{\partial\vartheta}\right)\right\} \quad \ldots\ldots (57).$$

II. Der Integrationsweg verläuft außerhalb des Einheitskreises ($r > 1$). Wie oben, zerlegen wir das Integral in zwei Teile; nur beginnen wir jetzt die Integration bei $r = \infty$ und integrieren entlang der reellen Achse bis $r = r_1$, dann wieder entlang des Kreises $r = r_1$ von 0 bis ϑ. Setzen wir noch $\frac{1}{r} = \varrho$, so wird:

$$\frac{d\zeta}{1-\zeta^4} = -\frac{\varrho^4 e^{-4i\vartheta}}{1-\varrho^4 e^{-4i\vartheta}}\frac{i\,d\vartheta}{\varrho\, e^{-i\vartheta}} = \{\Sigma\varrho^{4n+3}\sin(4n+3)\vartheta + i\,\Sigma\varrho^{4n+3}\cos(4n+3)\vartheta\}\,d\vartheta.$$

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\vartheta \frac{\ln\zeta\,d\zeta}{1-\zeta^4} = \Bigg[\Bigg\{&-\ln\varrho\,\Sigma\frac{\varrho^{4n+3}}{4n+3}\cos(4n+3)\vartheta + \vartheta\,\Sigma\frac{\varrho^{4n+3}}{4n+3}\sin(4n+3)\vartheta\\ &+ \Sigma\frac{\varrho^{4n+3}}{(4n+3)^2}\cos(4n+3)\vartheta\Bigg\} + i\Bigg\{\ln\varrho\,\Sigma\frac{\varrho^{4n+3}}{4n+3}\sin(4n+3)\vartheta\\ &+ \vartheta\,\Sigma\frac{\varrho^{4n+3}}{4n+3}\cos(4n+3)\vartheta - \Sigma\frac{\varrho^{4n+3}}{(4n+3)^2}\cos(4n+3)\vartheta\Bigg\}\Bigg]\\ &+ \Bigg\{\ln\varrho\,\Sigma\frac{\varrho^{4n+3}}{4n+3} - \Sigma\frac{\varrho^{4n+3}}{(4n+3)^2}\end{aligned}\right\} \quad (54\,\text{a}).$$

Der letzte Term ist $\int_0^\varrho \frac{\varrho^2\ln\varrho\,d\varrho}{1-\varrho^4} = -\int_\infty^r \frac{\ln r\,dr}{1-r^4}$, hebt sich also wiederum gegen den ersten Teil des Integrals fort. Die weitere Rechnung verläuft genau wie in I. Mit den entsprechenden Abkürzungen und $x - 1 = \xi$; $1 - y = \eta$ erhält man:

$$-F^* = \eta^2 - \frac{0{,}74244}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\varrho^2\sin 2\vartheta}{1-\varrho^4} + \frac{4}{\pi}\left\{\xi\eta\cdot\ln\varrho\right.$$
$$\left. + \frac{\vartheta}{2}(\xi^2-\eta^2) + {}^1/_2\int_0^\vartheta(\xi^2-\eta^2)\,d\vartheta - \frac{16}{\pi^2}\left(\Phi'\frac{\partial\Phi'}{\partial\vartheta} - \Psi'\frac{\partial\Psi'}{\partial\vartheta}\right)\right\} \quad \ldots\ldots (57\text{a}).$$

Um aus (57) und (57a) F zu berechnen, wurde zunächst ein Netz von Radien und Kreisen in dem durch $0 \leqq r \leqq 1$; $0 \leqq \vartheta \leqq \pi/4$ bestimmten Bereich der ζ-Ebene in die z-Ebene übertragen. Dabei wurden aus Rücksicht auf die numerische Berechnung für Kreise und Radien konstante Abstände gewählt, so daß also das Netz in der ζ-Ebene keine »quadratischen« Maschen besitzt. Es wurde $\Delta\vartheta = \pi/80$; $\Delta r = 0,1$ gewählt, außerdem noch die Kreise mit den Radien 0,94 und 0,98 übertragen. Diesem Netz entspricht in

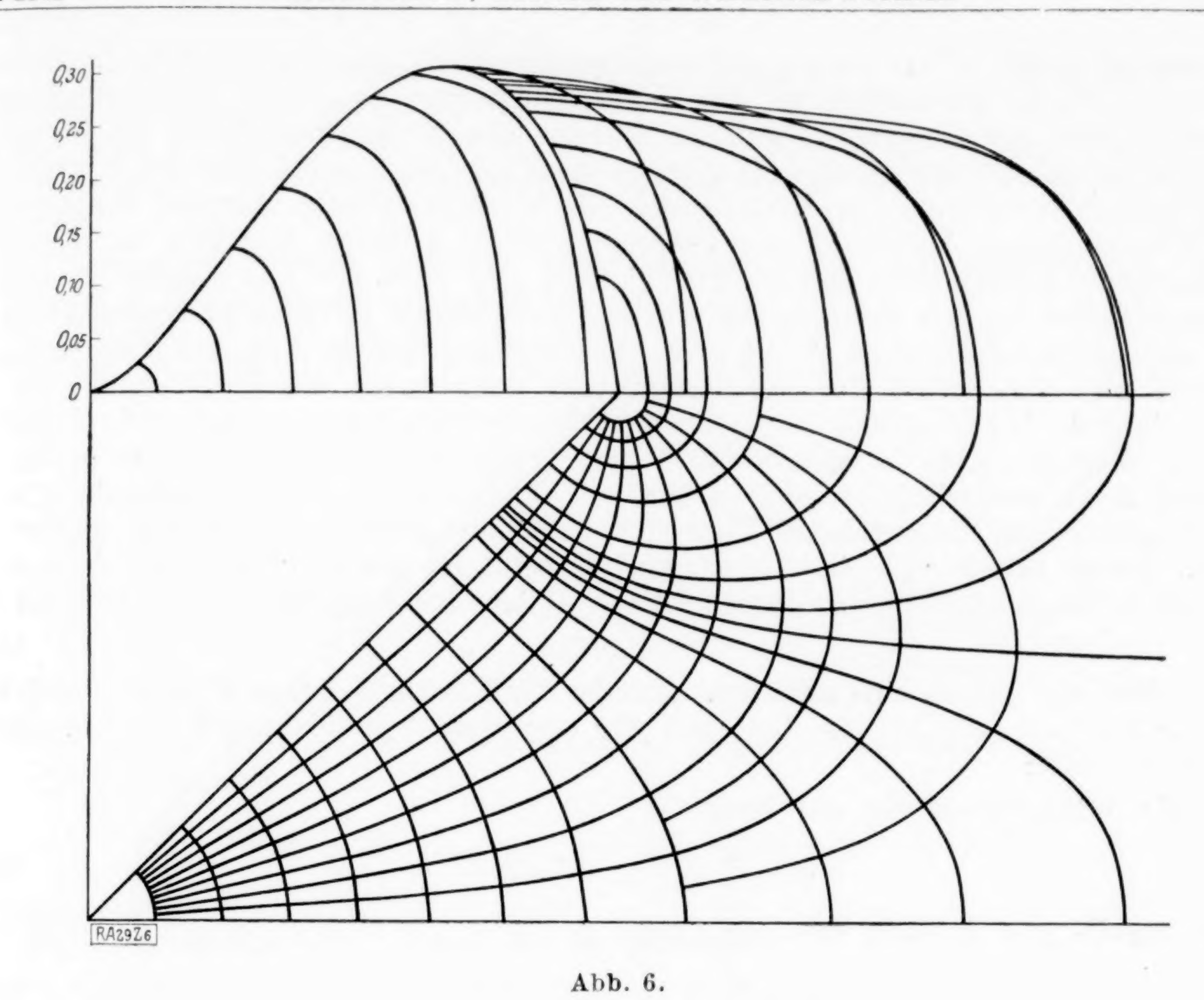


Abb. 6.

der z-Ebene das der unteren Begrenzung des Winkeleisens benachbarte Gebiet. Die Abbildung des entsprechenden Gebietes der ζ-Ebene außerhalb des Einheitskreises erhält man durch Transformation nach reziproken Radien des Netzes innerhalb des Einheitskreises. Hat man so x und y als Funktion von r und ϑ für die Netzpunkte berechnet, so kann man die in (57) und (57a) auftretenden Integrale numerisch auswerten. Hierbei wurde die Simpsonsche Regel benutzt, deren Genauigkeit völlig ausreicht. Da bei

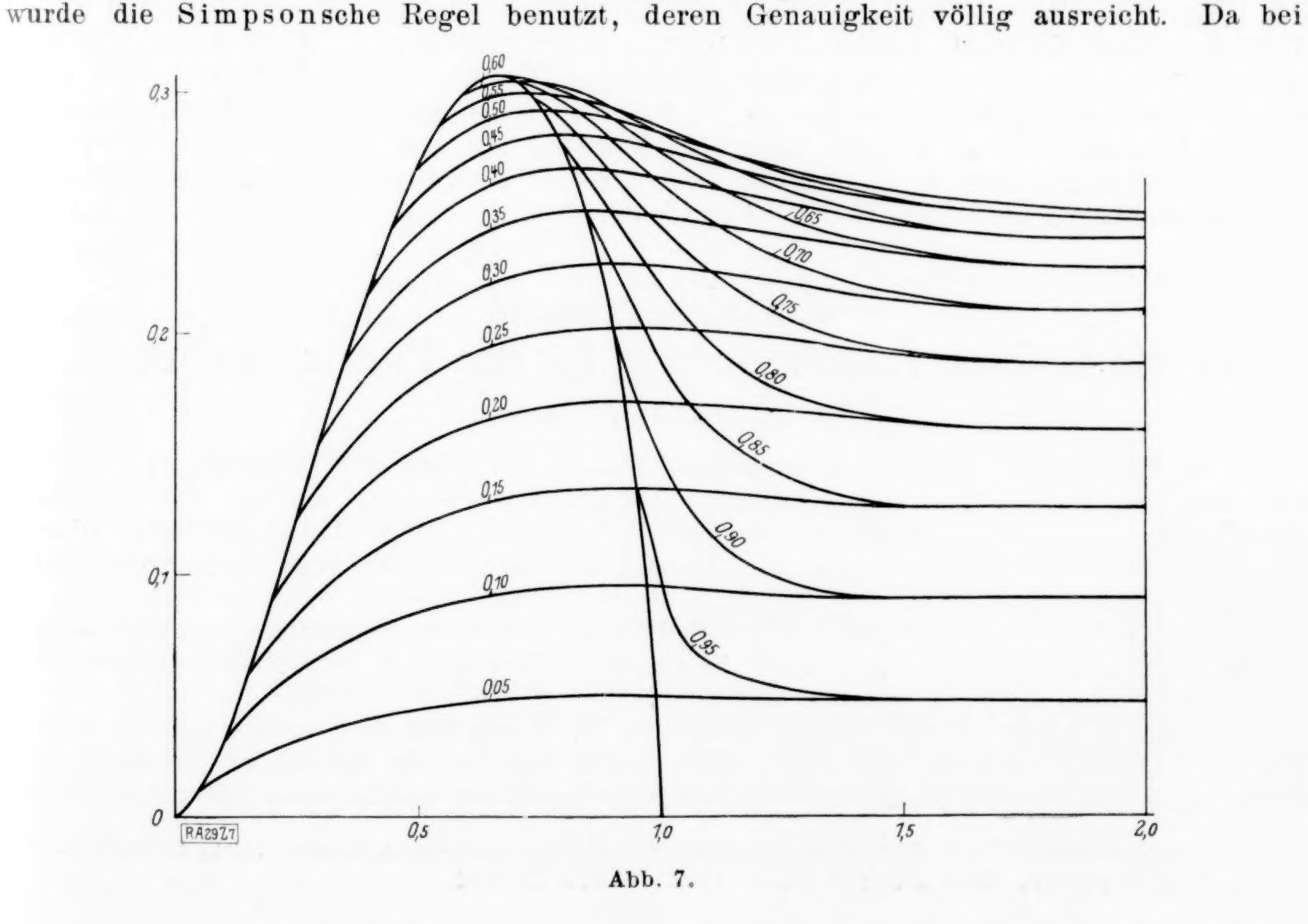


Abb. 7.

dieser Integration die Hälfte der Netzpunkte verlorengeht, erhält man F in Punkten der z-Ebene, die einem $\Delta\vartheta = \pi/40$ in der ζ-Ebene entsprechen. Zur Kontrolle dieser so erhaltenen Werte der Spannungsfunktion wurden die Werte von F auf der Mittellinie des Profiles nochmals durch Integration längs der Geraden $\vartheta = \pi/4$ berechnet. Die dabei sich ergebenden Abweichungen beeinflußten die vierte Dezimale maximal um zwei Einheiten. Die konforme Abbildung der ζ-Ebene auf die z-Ebene und den zu dem Netze in der z-Ebene gehörenden Verlauf von F zeigt die Abb. 6. Aus diesen Werten der Spannungsfunktion in den Netzpunkten wurden dann durch numerische Interpolation ihre Werte zunächst für äquidistante y ($\Delta y = 0{,}05$) berechnet und in Abb. 7 aufgetragen. Die Figur stellt also den Aufriß der Spannungsfläche dar, wobei die Grenzkurve, die auch schon in Figur 6 eingetragen wurde, der der Symmetrieachse entsprechende Schnitt ist. Aus diesen Werten wurde dann schließlich noch F für äquidistante x ($\Delta x = 0{,}05$) interpoliert, und zwar numerisch an Stellen steileren Verlaufs der Kurven, graphisch an den übrigen Punkten und daraufhin F über den gesamten Querschnitt bis $x = 2$ numerisch integriert. Damit erhält man den Drillungswiderstand des Kernstückes eines Winkeleisens mit unendlich langen Schenkeln, dessen Länge gleich der doppelten Breite ist. Es wird:

$$J_w = 1{,}0656 \quad \dots\dots\dots \quad (58).$$

Nach (27) hätte man genau eins erhalten. Nun ist das Zusatzglied in (46), da $e^{-\pi} = 0{,}04321$ ist, für $l > 2$ gleich $0{,}1050$, so daß man für den Drillungswiderstand der untersuchten Profilformen erhält:

I. für Winkeleisen von der Breite d

$$J = \frac{d^3}{3} \Sigma l_i - 0{,}1444\, d^4 \quad \dots\dots\dots \quad (59).$$

II. für **U**- und **Z**-Eisen von der Breite d

$$J = \frac{d^3}{3} \Sigma l_i - 0{,}0788\, d^4 \quad \dots\dots\dots \quad (60),$$

so daß also (27) in allen Fällen einen zu großen Drillungswiderstand ergibt; in beiden Fällen ist allerdings der Fehler, der für ein Winkeleisen ungefähr doppelt so groß ist wie bei einem **U**- bezw. **Z**-Eisen, sehr klein, was natürlich darauf beruht, daß die Abweichungen von dem Näherungswert in (46) und (58) sich beinahe kompensieren. Für die Berechnung des Drillungswiderstandes dieser Profile ist also die Föppl sche Formel sehr gut brauchbar, während die unter derselben Annahme berechneten Spannungen bei einem **T**-Träger recht erheblich von dem wirklichen Werte abweichen. Auch der Fehler des nach (27) berechneten Drillungswiderstandes eines **T**- oder Doppel-**T**-Trägers wird vermutlich wesentlich größer ausfallen als bei den oben behandelten Querschnitten, und zwar muß er in diesem Falle zu klein angegeben werden, wie man sich mit dem Seifenhautgleichnis leicht überlegt, wenn man die Ableitung des Näherungswertes für den Drillungswiderstand eines Einzelrechtecks dabei berücksichtigt. 29

Berücksichtigung der elastischen Formänderung in der Plastizitätstheorie.

Von **A. REUSS** in Budapest.

1. Betrachtet man den heutigen Stand der Plastizitätstheorie, so fällt es auf, daß zum größten Teil solche Probleme behandelt werden, bei welchen die elastische Formänderung neben der plastischen vernachlässigt werden kann. Diese Probleme spielen in der mechanischen Technologie der Metalle, insbesondere bei der Warmverformung, eine ganz bedeutende Rolle.

Im vorliegenden Aufsatze soll gezeigt werden, daß die Plastizitätstheorie auch auf solche Fälle angewendet werden kann, in welchen die plastische Formänderung von derselben Größenordnung ist, wie die elastische.

Diese Aufgabe wurde bereits auch von A. Haar und Th. v. Kármán[1]), ferner von H. Hencky[2]) gestellt und auch gelöst, indem das Prinzip des Minimums der Formänderungsarbeit für die plastische Formänderung postuliert wurde. Ihre Lösungen führen

[1]) A. Haar und Th. v. Kármán: Göttingen, Nachrichten math.-phys. Klasse, 1909, S. 204 bis 218.
[2]) H. Hencky, diese Zeitschr. Bd. 4 (1924), S. 323 bis 334.

jedoch, wie gezeigt werden kann, zu Widersprüchen, wodurch ein neuer Ansatz, welcher die Widersprüche behebt, gerechtfertigt wird.

Mit Hilfe dieses neuen Ansatzes werden zwei Beispiele durchgerechnet, welche geeignet erscheinen, an der Aufklärung des verborgenen Mechanismus der Formänderung mitzuwirken.

2. Ansatz zu einer Theorie plastisch-elastischer Formänderung. Für den elastischen Teil der Formänderung gilt bekanntlich:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x' - e' &= \frac{1}{2G}(\sigma_x - p); & \gamma_x' &= \frac{1}{G}\tau_x \\ \varepsilon_y' - e' &= \frac{1}{2G}(\sigma_y - p); & \gamma_y' &= \frac{1}{G}\tau_y \\ \varepsilon_z' - e' &= \frac{1}{2G}(\sigma_z - p); & \gamma_z' &= \frac{1}{G}\tau_z \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

$$e' = \frac{m-2}{2(m+1)G}\cdot p \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2),$$

wo

$$e' = {}^1/_3\,(\varepsilon_x' + \varepsilon_y' + \varepsilon_z') \quad \text{und} \quad p = {}^1/_3\,(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad \ldots \ldots \quad (3).$$

Wir nehmen an, daß die Volumänderung ausschließlich elastischen Ursprungs ist, so daß die Gleichung

$$e = \frac{m-2}{2(m+1)G}\cdot p \quad \ldots \quad (4) \quad \text{mit} \quad e = {}^1/_3\,(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

auch ganz allgemein besteht.

Die Plastizitätsgrenze nehmen wir in der Gestalt

$$(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6\,(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2) = 2\,k^2 \quad \ldots \quad (6)$$

an[1]), welche zu analytischen Berechnungen am geeignetsten erscheint und auch durch Versuche genügend gerechtfertigt ist.

Werden die elastischen Formänderungen neben den plastischen vernachlässigt, so setzt die Plastizitätstheorie die plastische Formänderungsgeschwindigkeit dem Spannungsdeviator proportional:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_x''}{dt} &= \frac{\lambda}{2G}(\sigma_x - p); & \frac{d\gamma_x''}{dt} &= \frac{\lambda}{G}\tau_x \\ \frac{d\varepsilon_y''}{dt} &= \frac{\lambda}{2G}(\sigma_y - p); & \frac{d\gamma_y''}{dt} &= \frac{\lambda}{G}\tau_y \\ \frac{d\varepsilon_z''}{dt} &= \frac{\lambda}{2G}(\sigma_z - p); & \frac{d\gamma_z''}{dt} &= \frac{\lambda}{G}\tau_z \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (7),$$

wo schon berücksichtigt wurde, daß die plastische Volumänderung Null ist. Diese Beziehungen wollen wir postulieren.

Endlich wird die Summe der aus (1) und (7) berechneten Deformationsgeschwindigkeiten der ganzen Deformationsgeschwindigkeit gleichgesetzt.

$$\left.\begin{aligned} 2G\frac{d}{dt}(\varepsilon_x - e) &= \frac{d}{dt}(\sigma_x - p) + \lambda(\sigma_x - p); & G\frac{d\gamma_x}{dt} &= \frac{d\tau_x}{dt} + \lambda\tau_x \\ 2G\frac{d}{dt}(\varepsilon_y - e) &= \frac{d}{dt}(\sigma_y - p) + \lambda(\sigma_y - p); & G\frac{d\gamma_y}{dt} &= \frac{d\tau_y}{dt} + \lambda\tau_y \\ 2G\frac{d}{dt}(\varepsilon_z - e) &= \frac{d}{dt}(\sigma_z - p) + \lambda(\sigma_z - p); & G\frac{d\gamma_z}{dt} &= \frac{d\tau_z}{dt} + \lambda\tau_z \end{aligned}\right\} \quad . \quad (8).$$

Von diesen Gleichungen hängen die drei ersten voneinander ab.

Sind $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ als Funktionen der Zeit gegeben, so genügen die Gl. (3), (4), (5), (6) und (8) zur Berechnung von $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z, p, \lambda$. Als Anfangswerte dienen die Werte dieser Größen beim Ueberschreiten der Fließgrenze.

Im speziellen Falle, daß die Hauptachsenrichtungen während der Deformation unverändert bleiben, lassen diese Gleichungen eine recht anschauliche Deutung zu. Das Koordinatenkreuz kann in den Hauptachsen angenommen werden, so daß identisch

[1]) Es ist das die von R. v. Mises eingeführte Bedingungsgleichung. Nachr. d. Gött. Ges. d. Wissensch. 1913.

$\tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$ ist. Ein jeder Spannungszustand wird dann im $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ Raum durch einen Vektor abgebildet, dessen in die Richtung $1:1:1$ fallende Komponente (p, p, p) ist. Der Vektor $\sigma_1 - p,\ \sigma_2 - p,\ \sigma_3 - p$ fällt also in die Ebene $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$.

Die Gl. (6) vereinfacht sich in unserem speziellen Falle zu

$$(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 2\,k^2 \qquad (9),$$

welche im $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ Raum durch einen Zylinder mit der Achsenrichtung $1:1:1$ dargestellt wird, da, wenn $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ein Punkt des Zylinders ist, es auch $\sigma_1 - t,\ \sigma_2 - t,\ \sigma_3 - t$ ist. Dieser Zylinder ist von der zweiten Ordnung, hat außerdem drei nicht zusammenfallende Symmetrieebenen, welche den Vertauschungen der Koordinaten entsprechen, ist also ein Kreiszylinder. Er wird von der zu seiner Achse senkrechten Ebene $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ in einem Kreise geschnitten, auf welchem die Endpunkte P der Vektoren mit den räumlichen Komponenten $\sigma_1 - p,\ \sigma_2 - p,\ \sigma_3 - p$ liegen müssen.

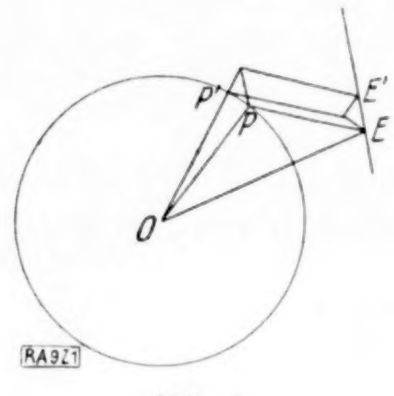


Abb. 1.

Fassen wir die Ebene $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ näher ins Auge (Abb. 1). Die Gesamtdeformation abzüglich der Volumänderung wird in dieser Ebene durch den Vektor OE mit den räumlichen Komponenten $2\,G\,(\varepsilon_1 - e),\ 2\,G\,(\varepsilon_2 - e),\ 2\,G\,(\varepsilon_3 - e)$ dargestellt. In demselben Maßstabe wird die elastische Formänderung abzüglich der Volumänderung durch den Halbmesser OP wiedergegeben. Die Differenz, der Vektor PE, stellt die plastische Deformation dar.

Die differenzielle Aenderung der Deformation läßt sich durch einen vom Punkte E aus gezogenen unendlich kleinen Vektor EE' versinnbildlichen. Die differenzielle Aenderung des Spannungszustandes wird durch einen Vektor veranschaulicht, welcher von P aus in die Richtung der Tangente des Kreises weist. Die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} 2\,G\,d\,(\varepsilon_1 - e) &= d\,(\sigma_1 - p) + \lambda\,(\sigma_1 - p)\,d\,t \\ 2\,G\,d\,(\varepsilon_2 - e) &= d\,(\sigma_2 - p) + \lambda\,(\sigma_2 - p)\,d\,t \\ 2\,G\,d\,(\varepsilon_3 - e) &= d\,(\sigma_3 - p) + \lambda\,(\sigma_3 - p)\,d\,t \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

besagen dann, daß der Vektor der differenziellen Deformationsänderung in zwei Komponente zerlegt werden kann, von denen die eine in die Richtung der Tangente im Punkt P weist und die Aenderung der Spannung bzw. der elastischen Formänderung angibt, die andere in die Richtung der Normale weist und die Aenderung der plastischen Deformation darstellt. Hier haben wir auch ein anschauliches Kriterium dafür gefunden, daß der Körper im plastischen Zustande verbleibt. Der Vektor, welcher die plastische Deformation darstellt, muß nach außen weisen, im entgegengesetzten Falle würde nämlich die ganze differenzielle Formänderung elastisch sein. Kurz gefaßt: die Deformation hat nur dann einen plastischen Anteil, wenn sich der Punkt E nach Ueberschreiten der Fließgrenze vom Mittelpunkt entfernt.

Ist der Halbmesser des Kreises, welcher die Fließgrenze darstellt, klein im Verhältnis zum Krümmungshalbmesser der Bahn von E, so dreht sich der Halbmesser OP zur Tangente in E nahezu parallel, die Aenderung der elastischen Formänderung kann dann gegenüber der plastischen vernachlässigt werden und $d\,(\varepsilon_1 - e), d\,(\varepsilon_2 - e), d\,(\varepsilon_3 - e)$ sind zu den Größen $\sigma_1 - p,\ \sigma_2 - p,\ \sigma_3 - p$ annähernd proportional.

So können wir also die Bedingungen veranschaulichen, unter denen die Vernachlässigung der elastischen Deformationen zulässig ist.

3. Anwendung auf konstante Formänderungsgeschwindigkeit. Subtrahiert man die drei ersten Gl. (8) paarweise der Reihe nach voneinander und führt die Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned} \zeta_x &= 2\,G\,\frac{d}{d\,t}(\varepsilon_y - \varepsilon_z); & \eta_x &= G\,\frac{d\,\gamma_x}{d\,t}; & \varrho_x &= \sigma_y - \sigma_z \\ \zeta_y &= 2\,G\,\frac{d}{d\,t}(\varepsilon_z - \varepsilon_x); & \eta_y &= G\,\frac{d\,\gamma_y}{d\,t}; & \varrho_y &= \sigma_z - \sigma_x \\ \zeta_z &= 2\,G\,\frac{d}{d\,t}(\varepsilon_x - \varepsilon_y); & \eta_z &= G\,\frac{d\,\gamma_z}{d\,t}; & \varrho_z &= \sigma_x - \sigma_y \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

ein, so gehen die Gl. (8) und (6) in

$$\left.\begin{aligned} \zeta_x &= \frac{d\varrho_x}{dt} + \lambda\,\varrho_x\,; & \eta_x &= \frac{d\tau_x}{dt} + \lambda\,\tau_x \\ \zeta_y &= \frac{d\varrho_y}{dt} + \lambda\,\varrho_y\,; & \eta_y &= \frac{d\tau_y}{dt} + \lambda\,\tau_y \\ \zeta_z &= \frac{d\varrho_z}{dt} + \lambda\,\varrho_z\,; & \eta_z &= \frac{d\tau_z}{dt} + \lambda\,\tau_z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13),$$

$$\varrho_x^2 + \varrho_y^2 + \varrho_z^2 + 6\,(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2) = 2\,k^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

über. Die letzte Gleichung nach t differenziert, ergibt

$$\varrho_x \frac{d\varrho_x}{dt} + \varrho_y \frac{d\varrho_y}{dt} + \varrho_z \frac{d\varrho_z}{dt} + 6\left(\tau_x \frac{d\tau_x}{dt} + \tau_y \frac{d\tau_y}{dt} + \tau_z \frac{d\tau_z}{dt}\right) = 0 \quad \ldots \quad (15).$$

Multipliziert man die Gl. (13) der Reihe nach mit $\varrho_x, \varrho_y, \varrho_z, 6\,\tau_x, 6\,\tau_y, 6\,\tau_z$ und addiert, so folgt mit Rücksicht auf (14) und (15)

$$\zeta_x\,\varrho_x + \zeta_y\,\varrho_y + \zeta_z\,\varrho_z + 6\,(\eta_x\,\tau_x + \eta_y\,\tau_y + \eta_z\,\tau_z) = 2\,k^2\,\lambda \quad \ldots \quad (16).$$

Sind die Komponenten der Formänderungsgeschwindigkeit konstant, so sind es auch die ζ und η, und es ergibt sich durch Differenzieren nach t weiter

$$\zeta_x \frac{d\varrho_x}{dt} + \zeta_y \frac{d\varrho_y}{dt} + \zeta_z \frac{d\varrho_z}{dt} + 6\left(\eta_x \frac{d\tau_x}{dt} + \eta_y \frac{d\tau_y}{dt} + \eta_z \frac{d\tau_z}{dt}\right) = 2\,k^2 \frac{d\lambda}{dt} \quad \ldots \quad (17).$$

Multipliziert man die Gl. (13) der Reihe nach mit $\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z, 6\,\eta_x, 6\,\eta_y, 6\,\eta_z$ und addiert, so erhält man mit Rücksicht auf (17)

$$\alpha^2 = \frac{d\lambda}{dt} + \lambda^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18),$$

wo zur Abkürzung

$$\alpha^2 = \frac{\zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2 + 6\,(\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2)}{2\,k^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

gesetzt wurde.

Den Anfangswert von λ erhalten wir aus (16) mit Hilfe der Anfangswerte $\varrho_{x0}, \varrho_{y0}, \varrho_{z0}, \tau_{x0}, \tau_{y0}, \tau_{z0}$ zu

$$\lambda = \frac{\zeta_x\,\varrho_{x0} + \zeta_y\,\varrho_{y0} + \zeta_z\,\varrho_{z0} + 6\,(\eta_x\,\tau_{x0} + \eta_y\,\tau_{y0} + \eta_z\,\tau_{z0})}{2\,k^2} \quad \ldots\ldots \quad (20).$$

Rechnen wir die Zeit vom Ueberschreiten der Fließgrenze an, so ist (18) mit diesen Anfangswerten integriert

$$t - t_0 = \frac{1}{\alpha}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\lambda}{\alpha} = \frac{1}{2\,\alpha}\,\log\frac{\alpha + \lambda}{\alpha - \lambda}$$

oder

$$\lambda = \alpha\,\mathfrak{Tg}\,\alpha\,(t - t_0) = \alpha\,\frac{e^{\alpha(t-t_0)} - e^{-\alpha(t-t_0)}}{e^{\alpha(t-t_0)} + e^{-\alpha(t-t_0)}} \quad \ldots\ldots \quad (21),$$

wo zur Abkürzung noch

$$t_0 = \frac{-1}{\alpha}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\lambda_0}{\alpha} = \frac{-1}{2\,\alpha}\,\log\frac{\alpha + \lambda_0}{\alpha - \lambda_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

gesetzt wurde.

Mit diesem Werte geht (13) in

$$\zeta_x = \frac{d\varrho_x}{dt} + \alpha\,\frac{e^{\alpha(t-t_0)} - e^{-\alpha(t-t_0)}}{e^{\alpha(t-t_0)} + e^{-\alpha(t-t_0)}}\,\varrho_x \text{ usw.} \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

über. Diese lineare Differenzialgleichung läßt sich leicht lösen und ergibt mit den Anfangswerten $t = 0$, $\varrho_x = \varrho_{x0}$

$$\varrho_x = \frac{\zeta_x}{\alpha}\cdot\frac{e^{\alpha(t-t_0)} - e^{-\alpha(t-t_0)} + \text{konst.}}{e^{\alpha(t-t_0)} + e^{-\alpha(t-t_0)}} = \frac{\zeta_x}{\alpha}\,\mathfrak{Tg}\,\alpha\,(t - t_0) + \frac{\varrho_{x0}\,\mathfrak{Cof}\,\alpha\,t_0 + \frac{\zeta_x}{\alpha}\,\mathfrak{Sin}\,\alpha\,t_0}{\mathfrak{Cof}\,\alpha\,(t - t_0)} \quad (24).$$

Mit Rücksicht auf (22) wird

$$\varrho_x = \frac{\zeta_x}{\alpha}\,\frac{\alpha\,\mathfrak{Sin}\,\alpha\,t + \lambda_0\,\mathfrak{Cof}\,\alpha\,t + \frac{\varrho_{x0}}{\zeta_x}\,\alpha^2 - \lambda_0}{\alpha\,\mathfrak{Cof}\,\alpha\,t + \lambda_0\,\mathfrak{Sin}\,\alpha\,t}\,.$$

Aehnliche Ausdrücke ergeben sich für die anderen Spannungskomponenten.

Mit wachsendem t streben, wie zu erwarten ist, die Größen $\varrho_x, \varrho_y, \varrho_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$ den entsprechenden und proportionalen Größen $\frac{\zeta_x}{\alpha}, \frac{\zeta_y}{\alpha}, \frac{\zeta_z}{\alpha}, \frac{\eta_x}{\alpha}, \frac{\eta_y}{\alpha}, \frac{\eta_z}{\alpha}$ zu. Wir stoßen also wieder auf die geläufige Plastizitätstheorie.

Aus den Werten $\varrho_x, \varrho_y, \varrho_z$ und p lassen sich die Spannungen mit Hilfe der Formeln

$$\sigma_x = p - \frac{\varrho_y - \varrho_z}{3}; \quad \sigma_y = p - \frac{\varrho_z - \varrho_x}{3}; \quad \sigma_z = p - \frac{\varrho_x - \varrho_y}{3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

berechnen. Für die Formänderungsgeschwindigkeiten bestehen die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d\,\varepsilon_x}{d\,t} = \frac{d\,e}{d\,t} - \frac{\zeta_y - \zeta_z}{6\,G}; \quad \frac{d\,\varepsilon_y}{d\,t} = \frac{d\,e}{d\,t} - \frac{\zeta_z - \zeta_x}{6\,G}; \quad \frac{d\,\varepsilon_z}{d\,t} = \frac{d\,e}{d\,t} - \frac{\zeta_x - \zeta_y}{6\,G} \\ \frac{d\,\gamma_x}{d\,t} = \frac{\eta_x}{G}; \quad \frac{d\,\gamma_y}{d\,t} = \frac{\eta_y}{G}; \quad \frac{d\,\gamma_z}{d\,t} = \frac{\eta_z}{G} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (26).$$

Diese Differentialgleichungen können, falls die Anfangswerte bekannt sind, unmittelbar integriert werden.

Die hier angegebene Lösung für konstante Formänderungsgeschwindigkeit läßt noch eine Verallgemeinerung zu. Der Parameter t muß nicht unbedingt die Zeit angeben, sondern kann selbst eine Funktion der Zeit sein. Unsere Ausführungen sind daher in allen Fällen anwendbar, in welchen sich die Komponenten der Formänderungsgeschwindigkeit zwar ändern, aber zueinander proportional bleiben. In diesem Falle läßt sich der Fortgang der Deformation im 6-dimensionalen Raum mit den Formänderungskomponenten als Koordinaten und der Zeit als Parameter durch einen räumlichen Poligonzug veranschaulichen.

4. Erstes Beispiel. Eine mögliche Erklärung der Verfestigung. Denken wir uns ein dünnwandiges zylindrisches Rohr bis zur Fließgrenze verdreht. Das Koordinatensystem nehmen wir so an, daß die Achse x in die Erzeugende des Zylinders, die Achse y in die Tangente, die Achse z in die Normale fällt. Die Wanddicke des Rohres ist gegen den Zylinderdurchmesser zu vernachlässigen. Dann sind alle Spannungskomponenten bis auf τ_{z0} gleich Null und aus (14) berechnet sich

$$\tau_{z0} = \frac{k}{\sqrt{3}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27).$$

Nun werde das weitere Verdrehen eingestellt und das verdrehte Rohr einem regelrechten Zugversuch unterworfen, und zwar so, daß es sich nicht wieder zurückdrehen kann. Es müssen also während dem ganzen Versuch die Gleichungen

$$\gamma_x = \gamma_y = \gamma_z = \sigma_y = \sigma_z = \varrho_x = 0; \quad -\varrho_y = \varrho_z = \sigma_x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

bestehen.

Mit Rücksicht auf (27) und (28) erhält man aus (20) $\lambda_0 = 0$, aus (22) $t_0 = 0$ und weiter aus Gl. (24) und den zu ihr analog gebauten Gleichungen

$$0 = \frac{\zeta_x}{\alpha}\,\mathfrak{Tg}\,\alpha\,t; \quad \sigma_x = -\frac{\zeta_y}{\alpha}\,\mathfrak{Tg}\,\alpha\,t = \frac{\zeta_z}{\alpha}\,\mathfrak{Tg}\,\alpha\,t,$$

woraus

$$\zeta_x = 0 \quad \text{und} \quad \zeta_z = -\zeta_y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

folgt. Mit diesen Werten wird die Hilfsgröße

$$\alpha = \frac{-\zeta_y}{k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

und

$$\sigma_x = k\,\mathfrak{Tg}\left(\frac{-\zeta_y\,t}{k}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

Die Gl. (26) können mit den Anfangswerten $\varepsilon_{x0} = \varepsilon_{y0} = \varepsilon_{z0} = e_0 = 0$ integriert werden und ergeben so

$$\varepsilon_x = e - \frac{\zeta_y}{3\,G}\,t; \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = e + \frac{\zeta_y}{6\,G}\,t; \quad \eta_x = \eta_y = \eta_z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (32).$$

Den Wert von ζ_y aus (31), den von e aus (4), (3) und (28) berechnet und in die erste Gl. (32) eingesetzt, erhält man die Gleichung der Spannungs-Dehnungslinie:

$$\varepsilon_x = \frac{m-2}{6\,(m+1)} \cdot \frac{\sigma_x}{G} + \frac{k}{3\,G}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\sigma_x}{k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33).$$

Für die Kontraktion erhält man analog:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{m-2}{6\,(m+1)} \cdot \frac{\sigma_x}{G} - \frac{k}{6\,G}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\sigma_x}{k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34).$$

Endlich für die übrigen Spannungen:

$$\tau_x = \tau_y = 0\,; \qquad \tau_z = \sqrt{\frac{k^2}{3} - \frac{\sigma_x^2}{3}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35).$$

In Abb. 2 sind die Werte von σ_x, τ_z und

$$\mu = -\frac{d\,\varepsilon_z}{d\,\varepsilon_y} = \frac{-\dfrac{d\,\varepsilon_x}{d\,\sigma_x}}{\dfrac{d\,\varepsilon_y}{d\,\sigma_x}} = \frac{3\,m - (m-2)\,\dfrac{\sigma_x^2}{k^2}}{3 + (m-2)\,\dfrac{\sigma_x^2}{k^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

zur Abszisse ε_x der Größe nach mit den Daten $m = 4$, $G = 800\,000$ kg/cm², $k = 3000$ kg/cm² aufgetragen. Mit wachsendem ε_x strebt σ_x dem Wert $\sigma_{x\,\max} = k$ zu.

Wenn wir unseren Zugversuch an irgendeiner Stelle unterbrechen und den Körper von der Zugkraft, aber nicht vom Drehmoment, entlasten, so verläßt er das plastische Gebiet und zieht sich zusammen, was im Diagramm durch eine Entspannungsgerade veranschaulicht wird, welche, wie leicht zu beweisen ist, zur Tangente im Anfangspunkte parallel läuft. Die augenblickliche Schubspannung τ_z bleibt auch weiterhin bestehen. Wir haben so einen Zustand, in dem alle Spannungen bis auf τ_z gleich Null sind. Der Unterschied gegenüber dem Anfangszustand des Zugversuches ist, daß die Schubspannung τ_z kleiner geworden ist.

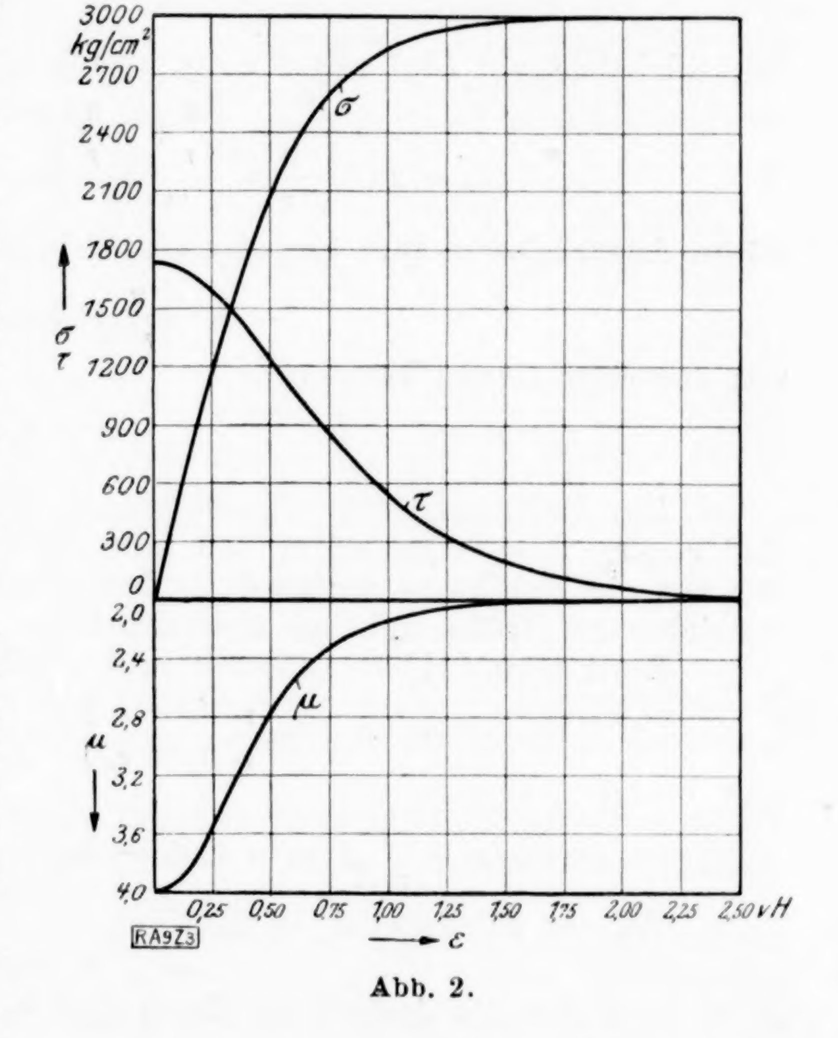


Abb. 2.

Wird das Rohr von neuem einer Zugkraft unterworfen, so steigt die Spannung bis zur Plastizitätsgrenze auf der Entspannungsgeraden empor und steigt dann weiter, als hätte überhaupt keine Entspannung stattgefunden.

Unterwirft man den Körper anstatt eines Zuges neuerlich einem Drucke, so erhält man ganz dasselbe Diagramm mit dem Unterschiede, daß die Spannungen jetzt Druckspannungen bedeuten. Man sieht, daß die Proportionalitätsgrenze für Zug und Druck durch die bleibende Formänderung angestiegen ist.

Es liegt an der Hand, die Erscheinung der Verfestigung solcher Körper, welche vorher nicht durch Verdrehen präpariert wurden, ähnlich zu erklären. Man muß nur annehmen, daß im Körper mikroskopische Spannungen wirken, welche durch die bleibende Formänderung verringert werden.

Diese Erklärung wird auch der merkwürdigen Tatsache gerecht, daß die Verfestigung für allerlei Beanspruchungen gleichzeitig auftritt. Wird ein Körper durch Ziehen verfestigt, so steigt seine Fließgrenze nicht nur für Zug, sondern auch für Verdrehung.

Das berechnete und in Abb. 2 wiedergegebene Spannungsdiagramm ist den Diagrammen, welche an Zerreißmaschinen aufgenommen werden, auffallend ähnlich. Man findet sich daher veranlaßt, aus dem Spannungsdiagramm die Konstanten E, G, $\sigma_{\max}$ des Dehnungsgesetzes

$$\varepsilon = \frac{\sigma_x}{E} + \frac{1}{3\,G}\left(\sigma_{\max}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\sigma_x}{\sigma_{\max}} - \sigma_x\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

zu bestimmen.

Es liegt mir fern, die Verfestigung ganz allgemein und in jedem Fall durch mikroskopische Spannungen erklären zu wollen, aber ich kann nicht umhin, auf die vorliegende Möglichkeit hinzuweisen, welche vielleicht für spröde Körper, wie Gußeisen und Beton, einen bedeutenden Teil der Erscheinung erfaßt.

5. Zweites Beispiel. Zerstörung des Materials durch wiederholten hydrostatischen Druck. Um auch noch ein Beispiel zu behandeln, bei welchem es sich nicht um eine homogene Deformation handelt, wähle ich eine Hohlkugel unter hydrostatischem Druck. Der Durchmesser des Hohlraumes innerhalb der Kugel sei von derselben Größenordnung wie die Wanddicke.

Aus der Symmetrie schließt man, daß alle tangentialen Richtungen miteinander gleichwertig sind. Alle Größen hängen nur vom Abstande r des Aufpunktes vom Kugelmittelpunkte ab. Führt man Polarkoordinaten ein und nimmt die x-Achse in der Normale an, so ist

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x = \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \qquad & \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_t = \frac{u}{r} \\ \gamma_x = \gamma_y = \gamma_z = 0\,, \qquad & e = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + 2\,\frac{u}{r}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (38),$$

wo u die radiale Verschiebung bezeichnet. Schreibt man noch das Gleichgewicht einer differentiellen, unendlich dünnen Halbkugelschale an, so folgt

$$d\,(r^2\,\pi \cdot \sigma_r) - 2\,r\,\pi \cdot d\,r \cdot \sigma_t = 0$$

$$2\,(\sigma_r - \sigma_t) + r\,\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39).$$

Mit Rücksicht auf (38) gilt für die elastische Formänderung

$$\sigma_r = 2\,G\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\dfrac{\partial u}{\partial r} + 2\,\dfrac{u}{r}}{m-2}\right), \qquad \sigma_t = 2\,G\left(\frac{u}{r} + \frac{\dfrac{\partial u}{\partial r} + 2\,\dfrac{u}{r}}{m-2}\right) \quad . \; . \; . \quad (40).$$

Diese Ausdrücke in (39) eingesetzt und geordnet, erhält man die Differentialgleichung

$$r^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2\,r\,\frac{\partial u}{\partial r} - 2\,u = 0$$

mit der allgemeinen Lösung

$$u = c_1\,r + \frac{c_2}{r^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (41).$$

Zur Bestimmung der Konstanten c_1 und c_2 haben wir die Randwerte $r = r_1$, $\sigma_r = 0$ und $r = r_2$, $\sigma_r = -p_0$, wo r_1 den inneren, r_2 den äußeren Halbmesser bezeichnet. p_0 ist der auf die Hohlkugel wirkende hydrostatische Druck und ist von der im Vorigen mit p bezeichneten Größe wohl zu unterscheiden.

Setzt man (41) in (40) ein und beachtet die Randwerte, so folgt

$$\sigma_r = -\,p_0\,\frac{r_2^3\,(r^3 - r_1^3)}{r^3\,(r_2^3 - r_1^3)}, \qquad \sigma_t = -\,\frac{p_0}{2}\,\frac{r_2^3\,(2\,r^3 + r_1^3)}{r^3\,(r_2^3 - r_1^3)} \quad . \; . \; . \; . \quad (42)$$

und

$$u = r\,\varepsilon_t = \frac{r}{m\,E}\left[(m-1)\,\sigma_t - \sigma_r\right] = \frac{-\,p_0}{2\,m\,E} \cdot \frac{r_2^3\left[2\,(m-2)\,r^3 + (m+1)\,r_1^3\right]}{r^2\,(r_2^3 - r_1^3)} \quad . \; . \quad (43).$$

An der Fließgrenze ist laut (6)

$$\sigma_r - \sigma_t = k \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (44).$$

Setzt man hier die Ausdrücke für σ_r und σ_t ein und löst nach p_0 auf, so erhält man

$$p_0 = \frac{2}{3}\,k\,\frac{r^3\,(r_2^3 - r_1^3)}{r_2^3\,r_1^3}.$$

Den kleinsten Wert bekommen wir für die am höchsten beanspruchte Stelle $r = r_1$, wo

$$p_0 = \frac{2}{3}\,k\left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (45)$$

ist. Ist der innere Halbmesser klein gegenüber dem äußeren, so kann näherungsweise

$$p_0 = \frac{2}{3}\,k \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (46)$$

gesetzt werden.

Wird der Wert (45) bzw. (46) von p_0 überschritten, so tritt die Hohlkugel von der inneren Fläche an allmählich in den plastischen Zustand über.

Im plastischen Zustande bestehen die Gleichungen (39) und (44), aus denen für σ_r die Differentialgleichung

$$2\,k + r\,\frac{d\,\sigma_r}{d\,r} = 0$$

mit der Lösung

$$\sigma_r = -2\,k\log\frac{r}{r_1}\,, \qquad \sigma_t = -k\left(1 + 2\log\frac{r}{r_1}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

folgt, wo die Randwerte $r = r_1$, $\sigma_r = 0$ bereits berücksichtigt wurden. Bedenkt man, daß jetzt

$$e = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + 2\,\frac{u}{r}\right) \quad \text{und} \quad p = -2\,k\left(\frac{1}{3} + \log\frac{r}{r_1}\right),$$

so geht (4) in

$$\frac{\partial u}{\partial r} + 2\,\frac{u}{r} = -\frac{(m-2)\,k}{(m+1)\,G}\left(1 + 3\log\frac{r}{r_1}\right)$$

über, woraus man u zu

$$u = -\frac{c}{r^2} - \frac{(m-2)\,k}{(m+1)\,G}\,r\log\frac{r}{r_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

berechnet. Die Integrationskonstante bestimmt man aus der Bedingung, daß die Verschiebung u an der Kugelfläche mit dem Halbmesser ϱ, bis zu welcher die plastische Formänderung vorgedrungen ist, denselben Wert ergibt, gleichgültig, ob sie aus der für das plastische oder elastische Gebiet gültigen Gleichung berechnet wird.

Zwei weitere Gleichungen erhält man aus der Bedingung, daß an der Kugelfläche ϱ sich die Spannungen σ_r und σ_t stetig ändern. Für σ_r folgt dies unmittelbar aus dem Gleichgewicht eines Körperelementes, für σ_t besteht an der Uebergangsstelle sowohl im plastischen wie auch im elastischen Gebiet $\sigma_r - \sigma_t = k$, woraus auch die Stetigkeit von σ_t folgt.

An der Stelle ϱ berechnet man

$$\sigma_{r0} = -2\,k\log\frac{\varrho}{r_1}\,, \qquad \sigma_{t0} = \sigma_{r0} - k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49).$$

Im elastischen Teile bestehen ferner die Gleichungen

$$\sigma_r = -p_0\,\frac{r_2^3\,(r^3 - r_1'^3)}{r^3\,(r_2^3 - r_1'^3)}\,, \qquad \sigma_t = -p_0\,\frac{r_2^3\,(r^3 + {}^1\!/_2\,r_1'^3)}{r^3\,(r_2^3 - r_1'^3)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50),$$

aus denen die Konstante r_1' bzw. p_0 eliminiert werden kann, was mit $r = \varrho$ auf

$$r_1'^3 = -\varrho^3\,\frac{k}{\sigma_{t0} + \dfrac{\sigma_{r0}}{2}}\,, \qquad p_0 = -\sigma_{r0} + \frac{2}{3}\,k\left(1 - \frac{\varrho^3}{r_2^3}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

führt.

Aus den Gleichungen (47), (49), (50) und (51) können bei bekanntem ϱ alle beliebigen Spannungen, aus (43) mit r_1' für r_1 die Verschiebung u im elastischen Gebiet, ferner aus (48) u im plastischen Gebiet und weiter aus (38) alle Dehnungen berechnet werden.

Wie verhält sich nun unser Körper, wenn der Druck p_0 etwas vermindert wird? Das Vermindern von p_0 vermindert im ganzen Körper $\sigma_r - \sigma_t$, so daß der plastische Zustand im ganzen Körper auf einmal aufhört.

Wird der hydrostatische Druck überhaupt aufgehoben, so können die Spannungen leicht berechnet werden, da von den oben für den hydrostatischen Druck berechneten Spannungen nur die aus (42) zu berechnenden elastischen Spannungen abzuziehen sind, vorausgesetzt, daß die Fließgrenze jetzt nicht in der anderen Richtung überschritten wird, also, daß $\sigma_r - \sigma_t > -k$.

Die Fließgrenze wird jetzt wieder an der inneren Kugelfläche zuerst überschritten. Da hier ursprünglich $\sigma_r - \sigma_t = k$ war, so muß zur Berechnung der Fließgrenze ein elastischer Spannungszustand superponiert werden, für den $\sigma_r - \sigma_t = 2\,k$, so daß für die Summe $\sigma_r - \sigma_t = -k$ gilt.

Man ersieht daher, daß wenn der Körper dem doppelten desjenigen hydrostatischen Druckes unterworfen wird, bei welchem er die Fließgrenze zuerst überschreitet, so erreicht er beim Entlasten an der inneren Kugelfläche wieder die Fließgrenze, aber von der entgegengesetzten Richtung aus. Diesen Druck berechnet man aus (45) zu

$$p_0 = \frac{4}{3}\,k\left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52),$$

oder, falls $r_1 \ll r_2$

$$p_0 = \frac{4}{3}\,k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53).$$

Wird dieser Druck beim Belasten überschritten, so tritt beim Entlasten abermals eine plastische, entgegengesetzt gerichtete Formänderung ein.

Wird der Körper abwechselnd mit dem ursprünglichen Druck belastet und wieder entlastet, so wird das Material von innen nach auswärts zu ermüdet und zerstört.

Ist r_1/r_2 nicht genügend klein, so kann es vorkommen, daß ehe der Wert p_0 in (52) erreicht würde, der ganze Körper in den plastischen Zustand übergegangen ist. Die Bedingung hierfür berechnet man aus

$$2\,k \log \frac{r_2}{r_1} = \frac{4\,k}{3}\left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3\right]$$

zu $r_1/r_2 = 0{,}5879$.

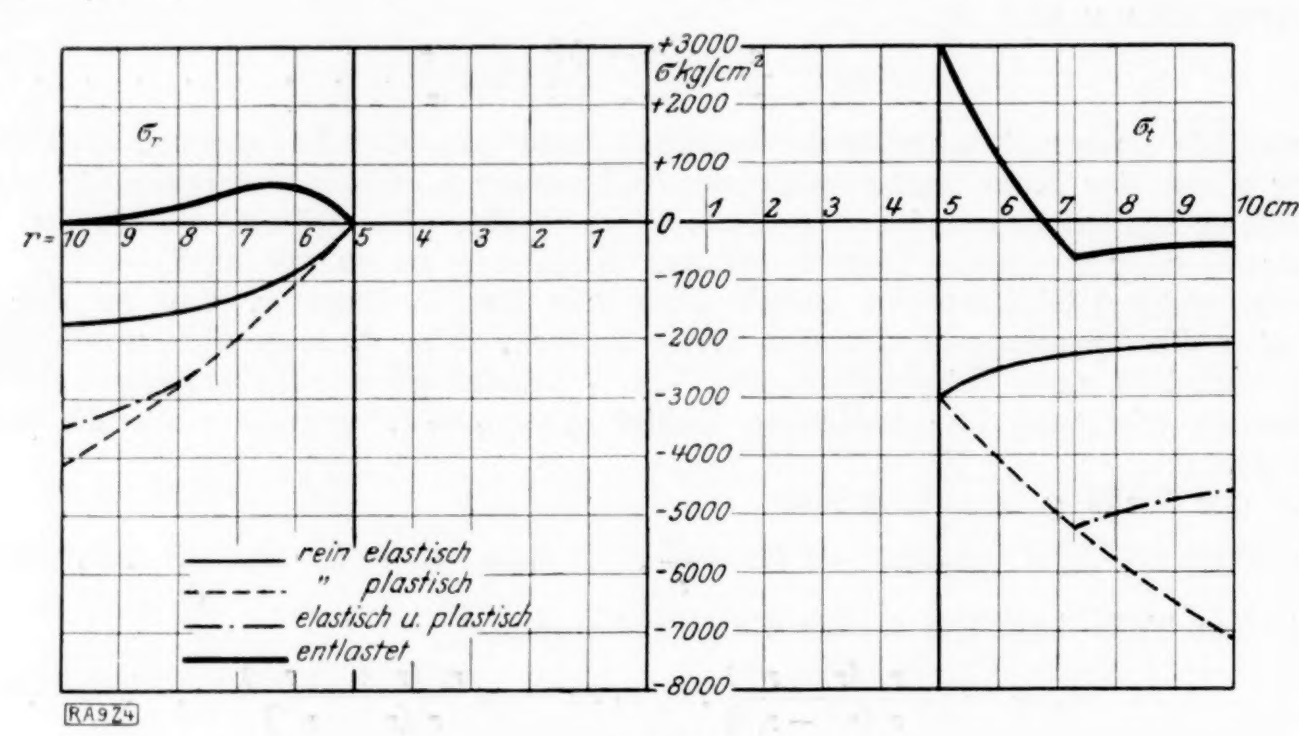


Abb. 3.

Die Werte von σ_r und σ_t sind in Abb. 3 für die Werte von

$$p_0 = \frac{2}{3}\,k\left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3\right], \qquad p_0 = \frac{4}{3}\,k\left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3\right]$$

ferner nach der Entlastung dargestellt. Es wurde gewählt $r_1 = 5$ cm, $r_2 = 10$ cm, $m = 4$, $E = 2\,000\,000$ kg/cm², $G = 800\,000$ kg/cm², $k = 3000$ kg/cm². 9

Geschwindigkeitspläne räumlicher Getriebe.[1]

Von **HANS WINTER** in Graz.

Einer Anregung Herrn Federhofers folgend wird im nachstehenden — gestützt auf die in seinen bisherigen Veröffentlichungen [2]) verwendeten Methoden der kinematischen Behandlung des räumlichen Systems sowie auf die von Grübler, Müller und Alt stammenden Arbeiten über den Zwanglauf räumlicher Getriebe [3]) — das Entwerfen von Geschwindigkeitsplänen dieser Getriebe an einigen Beispielen gezeigt.

---

[1]) Auszug aus dem kinematischen Teile der von der Technischen Hochschule Graz genehmigten Dissertation des Verfassers über: »Beiträge zur Kinematik und Kinetostatik der Getriebe.« — Herrn Prof. Dr.-Ing. Federhofer, dem ich die weitgehendste Förderung der vorliegenden Arbeit verdanke, sei auch an dieser Stelle der herzlichste Dank hierfür ausgesprochen.

[2]) K. Federhofer: Ueber die Beschleunigung bei der räumlichen Bewegung des starren Körpers. Diese Zeitschr. Bd. 7 (1927), S. 290 bis 298. — Graph. Kinematik und Kinetostatik des starren räumlichen Systems. Verlag J. Springer, Wien 1928. — Graph. Kinematik der räumlichen schwingenden Kurbelschleife. Sitzungsbericht der Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw. Klasse Abtlg. IIa, 138. Bd., 1. und 2. Heft 1929. — Graph. Kinematik des Taumelscheibentriebes. Diese Zeitschr. Bd. 9 (1929), S. 312 bis 318.

[3]) M. Grübler: Kriterium der Zwangläufigkeit der Schraubenketten. Festschrift zu O. Mohrs 80. Geburtstage. Berlin 1916, S. 124. — R. Müller: Die Zwangläufigkeit kinem. Ketten. Von der Technischen Hochschule Dresden genehmigte Dissertation. (Im Druck nicht erschienen.) — H. Alt: Die praktische Bedeutung der Raumgetriebe. Z. d. VDI 1929, Heft 6, S. 188.

1. Einteilung der Raumgetriebe und deren Zwanglauf. Je nach der Art der die einzelnen Glieder eines Raumgetriebes verbindenden Elementenpaare unterscheidet man:

a) Getriebe mit nur einfachen Elementenpaaren, d. s. Elementenpaare von einem Freiheitsgrad (Drehpaar, Schraubenpaar, Schiebepaar);

b) Getriebe, in welchen auch Elementenpaare von mehreren Freiheitsgraden vorkommen. (Kreuzgelenk, Dreh-Schiebepaar, Kardangelenk, Kugelgelenk usw.).

Weiters teilt man die den Ausgangspunkt der Raumgetriebe bildenden räumlichen kinematischen Ketten in einfache und zusammengesetzte. Einfache kinematische Ketten werden ausschließlich von binären Gliedern gebildet, während in zusammengesetzten auch ternäre nnd höhere Glieder auftreten. Auf diese letzteren soll hier nicht näher eingegangen werden.

Bei völlig willkürlicher Lage der Dreh- bzw. Schraubenachsen beträgt die zur Bildung einer einfachen zwangläufigen Kette notwendige Gliederanzahl bekanntlich $n = 7$. In Sonderfällen, wie sie durch spezielle Werte des Schraubenparameters (z. B. $\alpha = \infty$ bei reinen Schiebepaaren) oder durch besondere Lagen der Achsen gegeben sind, vermindert sich die Anzahl der notwendigen Glieder. Sind z. B. alle Schraubenpaare durch Schiebepaare ersetzt, so ist eine solche Kette mit $n = 4$ Glieder zwangläufig beweglich. (Räumliche Schiebepaarkette.) Soll ein räumliches Getriebe mit $n = 6$ Gliedern zwangläufig beweglich sein, so müssen je drei Dreh- bzw. Schraubenachsen dauernd einer Richtung parallel sein. Der Geschwindigkeitszustand dieser beiden Sonderfälle ist in (3) und (4) behandelt.

Eine andere Möglichkeit, die Gliederanzahl in einem Raumgetriebe herabzumindern, besteht darin, daß man die Größe einzelner Glieder zu Null werden läßt, wobei allerdings an die Stelle zweier Elementenpaare von einem Freiheitsgrade ein Elementenpaar mit zwei Freiheitsgraden treten muß. Auf diese Weise entstehen die unter b) genannten Getriebe, die Untersuchung ihres Geschwindigkeitszustandes erfolgt an Hand einiger Beispiele in (5), (6) und (7).

Zur Darstellung der Raumvektoren wurde ebenso wie in den genannten grundlegenden Arbeiten durchwegs das Abbildungsverfahren von Mayor und v. Mises herangezogen.

2. Lösung zweier Grundaufgaben der darstellenden Geometrie im Abbildungsverfahren von Mayor und v. Mises. Die nachstehenden kinematischen Untersuchungen erfordern mehrmals die Lösung folgender Grundaufgaben im genannten Abbildungsverfahren:

a) Bestimmung der Schnittlinie zweier Ebenen. Jede der Ebenen sei durch einen in ihr liegenden Punkt und durch den für die Ebene charakteristischen Abbildungspunkt gegeben. Es seien dies die Punkte A, B und e_A, e_B, entsprechend den Ebenen E_A und E_B (Abb. 1).

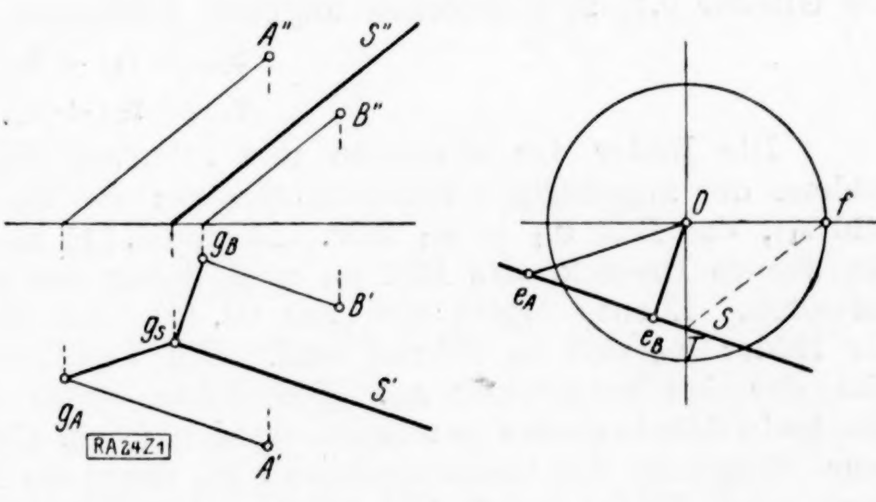


Abb. 1.

Da die Schnittlinie der Ebenen E_A und E_B eine den beiden Ebenen gemeinsame Gerade ist, liefert die Verbindung der Abbildungspunkte e_A und e_B bereits das Bild der Schnittlinie.

Um ihren Spurpunkt anzugeben, werden zunächst die Spurpunkte g_A und g_B der zur Schnittlinie Parallelen durch A uud B bestimmt, die jedenfalls den Grundrißspuren der Ebenen E_A und E_B angehören. Die Richtung der Grundrißspur einer Ebene ist durch die Verbindung ihres Abbildungspunktes mit dem Ursprung O gegeben, da diese Gerade das Bild einer zur Grundrißebene parallelen Geraden der Ebene, somit einer ersten Spurparallelen darstellt. Es sind daher die Parallelen durch g_A und g_B zu Oe_A bzw. Oe_B die Grundrißspuren der Ebenen, ihr Schnittpunkt g_s ist der Spurpunkt der Schnittlinie S, wodurch deren Lage festgelegt ist. ($S'' \parallel f\,T$).

b) Bestimmung des Durchstoßpunktes einer Geraden mit einer Ebene. Diese Aufgabe läßt sich, wenn die Gerade L durch Grund- und Aufriß, die Ebene E durch einen in ihr liegenden Punkt A und ihren Abbildungspunkt e gegeben ist, ohne Auffindung der Spuren der Ebene einfach lösen. Ist D der gesuchte Durchstoßpunkt, x ein beliebiger Punkt auf L, so bilden die Punkte $A\,D\,x$ ein Dreieck, dessen Seite $A\,D$ in der Ebene E liegen muß.

Der Durchstoßpunkt D kann daher gewonnen werden, wenn man auf L einen beliebigen Punkt x annimmt, mit A verbindet und das Bild Ax bestimmt. Dieses schneidet das Bild der Geraden L in s, dem Abbildungspunkte der Ebene AxD, der mit e verbunden, das Bild der Geraden AD liefert. Die Parallele hierzu durch A' schneidet L' im gesuchten Punkte D'. (Abb. 2).

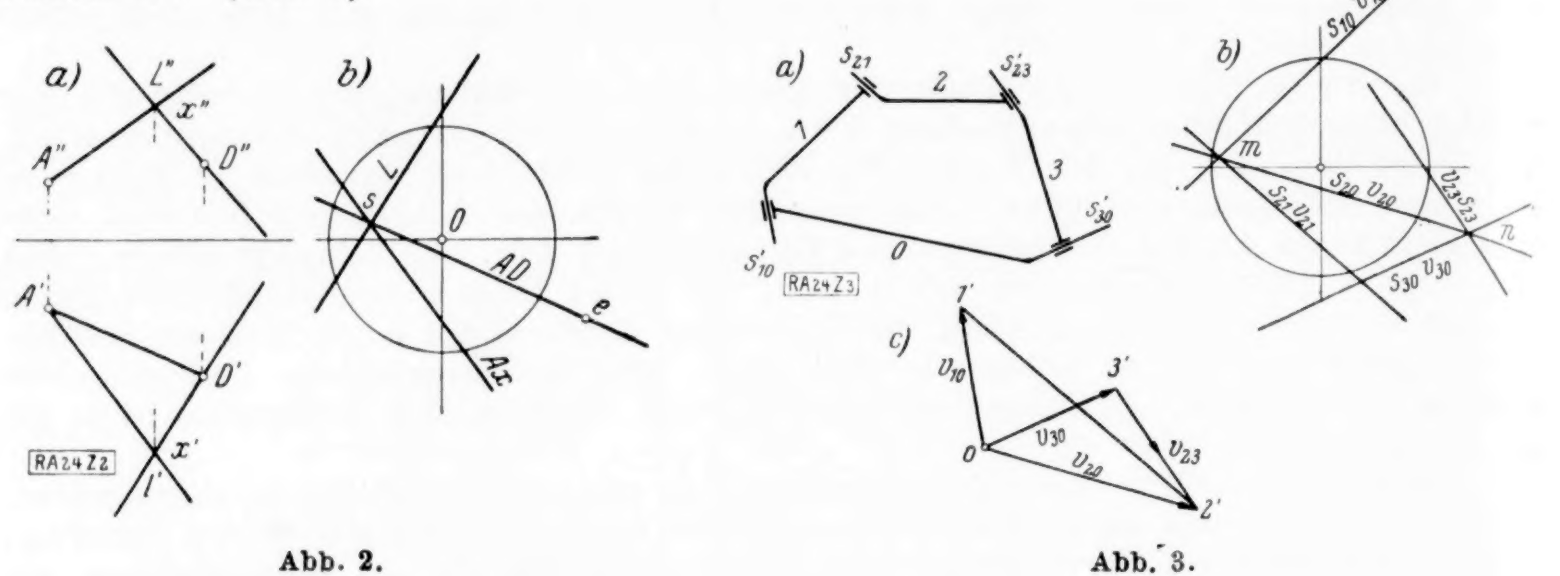


Abb. 2. Abb. 3.

3. Die räumliche Schiebepaarkette. Die räumliche Schiebepaarkette ist zwangläufig, wenn sie aus 4 Gliedern besteht und die Achsen der Schiebepaare beliebige Lagen und Richtungen haben.

Abb. 3 zeigt eine derartige Kette im Grundrisse. Die die Glieder 0, 1, 2, 3 verbindenden Schiebepaare seien mit $s_{10}, s_{21}, s_{23}, s_{30}$ bezeichnet. Weiters sind die Bilder der Schubrichtungen bezogen auf den Abbildungskreis ($r = c$) bekannt und gleich bezeichnet.

Bei festgehaltenem Gliede 0 sind die Geschwindigkeitszustände aller Glieder durch die Annahme der Größe einer Geschwindigkeit, z. B. der des Gliedes 1, bestimmt und können daraus ermittelt werden.

Zwischen den absoluten und relativen Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_{10}$, $\mathfrak{v}_{20}$, $\mathfrak{v}_{30}$ und $\mathfrak{v}_{21}$, $\mathfrak{v}_{23}$ der Glieder 0,1, 2, 3 bestehen folgende Beziehungen:

$$\mathfrak{v}_{20} = \mathfrak{v}_{10} + \mathfrak{v}_{21} \quad \text{. . . . . (1),}$$

$$\mathfrak{v}_{20} = \mathfrak{v}_{30} + \mathfrak{v}_{23} \quad \text{. . . . . (2).}$$

Die Bilder der absoluten und relativen Geschwindigkeiten decken sich mit den Bildern der zugehörigen Schubrichtungen; das Bild der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{10}$ fällt in das Bild s_{10}, das Bild v_{21} in s_{21} usw. Nach Gl. (1) bilden die Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_{10}, \mathfrak{v}_{20}, \mathfrak{v}_{21}$ ein ebenes Dreieck, das Bild v_{20} muß daher den Schnittpunkt m der Bilder v_{10} und v_{21} enthalten. Ebenso ergibt sich aus Gl. (2), daß das Bild v_{20} durch den Schnittpunkt n der Bilder v_{30} und v_{23} führen muß. Die Verbindung der Punkte m, n gibt daher das Bild der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{20}$. Die Größe dieser Geschwindigkeit kann mit Hilfe eines Geschwindigkeitsplanes gewonnen werden (Abb. 3b). Es stellt die Strecke 0 1' die gegebene Bildgröße der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{10}$ dar; die Bildgröße v_{20} der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{20}$ kann nach Gl. (1) konstruiert werden, indem man 0 2' parallel dem Bilde v_{20} und 1' 2' parallel dem Bilde v_{21} zieht. Die Zerlegung der Bildlänge v_{20} nach den Richtungen der Bilder v_{30} und v_{23} liefert die Bildlängen dieser Geschwindigkeiten.

4. Abb. 4 stellt das bereits in (1) beschriebene **sechsgliedrige Raumgetriebe** dar. Die Achsen I, II, III der als reine Drehpaare gedachten Elementenpaare seien der Richtung $\mathfrak{K}$, die Achsen IV, V, VI der Richtung $\mathfrak{L}$ parallel. Glied I mit den Achsen I und VI werde im Raume festgehalten; $\mathfrak{w}_{21}$ sei der Winkelgeschwindigkeitsvektor des Gliedes 2 gegen das feste Glied 1, die Winkelgeschwindigkeitsvektoren der Bewegungen der Glieder 3 gegen 2, 4 gegen 3 . . . 6 gegen 1 mögen mit $\mathfrak{w}_{32}, \mathfrak{w}_{43}, \ldots \mathfrak{w}_{61}$ bezeichnet werden. Durch Angabe der Größe von $\mathfrak{w}_{21}$ oder der absoluten Geschwindigkeit eines

Punktes auf dem Gliede 2, z. B. der des Punktes C, ist der Geschwindigkeitszustand des ganzen Getriebes festgelegt. Da die bekannte Bewegung des Gliedes 2 auch als resultierende Bewegung um die Achsen VI, V . . . II aufgefaßt werden kann, liefert die Zerlegung von $\mathfrak{w}_{21}$ in die Wirkungslinien der übrigen Winkelgeschwindigkeitsvektoren deren Größen. Dies entspricht in der Statik der Zerlegung einer Kraft in 5 Wirkungslinien, deren Richtungen die oben angeführten Bedingungen erfüllen.

Es ist demnach:

$$\mathfrak{w}_{21} = \mathfrak{w}_{23} + \mathfrak{w}_{34} + \mathfrak{w}_{45} + \mathfrak{w}_{56} + \mathfrak{w}_{61}$$

oder, da allgemein $\mathfrak{w}_{ik} = -\mathfrak{w}_{ki}$,

$$(\mathfrak{w}_{21} + \mathfrak{w}_{32} + \mathfrak{w}_{43}) + (\mathfrak{w}_{54} + \mathfrak{w}_{65} + \mathfrak{w}_{16}) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (3).$$

Daraus folgt unmittelbar:

$$\mathfrak{w}_{21} + \mathfrak{w}_{32} + \mathfrak{w}_{43} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (4),$$

$$\mathfrak{w}_{54} + \mathfrak{w}_{65} + \mathfrak{w}_{16} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (5),$$

da die in den Klammern der Gl. (3) stehenden Summenvektoren zwei verschiedenen Richtungen parallel sind; Gl. (3) kann daher nur erfüllt sein, wenn beide Klammerausdrücke gleich 0 sind. Aus Gl. (4) ist ersichtlich, daß die Vektoren $\mathfrak{w}_{21}$ und $(\mathfrak{w}_{32} + \mathfrak{w}_{43}) = (-\mathfrak{w}_{21})$ ein Rotationspaar bilden; die resultierende Bewegung des Gliedes 4 ist daher eine Translation, deren Größe und Richtung durch das Moment des genannten Rotationspaares gegeben ist. Dieser Momentenvektor $\mathfrak{t}$, der somit die allen Punkten des Gliedes 4 gemeinsame Translationsgeschwindigkeit darstellt, steht jedenfalls senkrecht auf der Richtung $\mathfrak{K}$ der Vektoren $\mathfrak{w}_{21}$, $\mathfrak{w}_{32}$ und $\mathfrak{w}_{43}$, sein Bild muß daher den in Abb. 4 eingetragenen Antipol e_K der Richtung $\mathfrak{K}$ enthalten. Anderseits muß das Bild des gesuchten Translationsvektors auch durch den Antipol e_L der Richtung $\mathfrak{L}$ führen, da nach Gl. (5) auch die Vektoren $\mathfrak{w}_{61}$ und $(\mathfrak{w}_{45} + \mathfrak{w}_{56})$ ein Rotationspaar bilden. Es ist daher durch die Verbindung $e_K e_L$ das Bild t der allen Punkten des Gliedes 4 gemeinsamen Geschwindigkeit festgelegt.

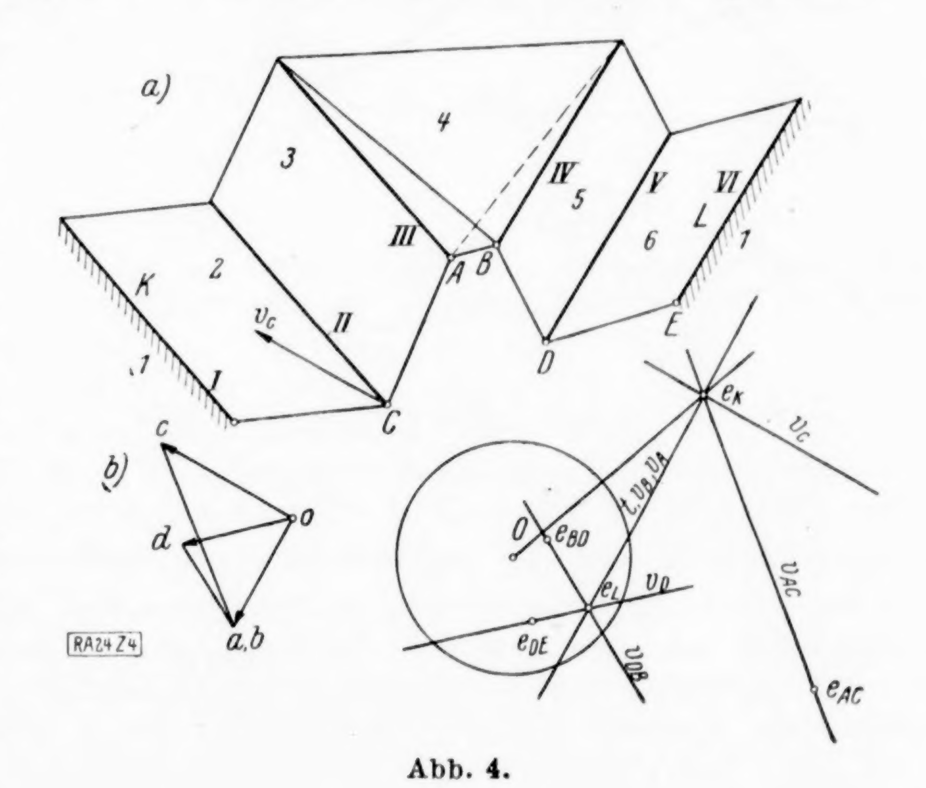


Abb. 4.

Abb. 4b zeigt den Geschwindigkeitsplan des Getriebes unter der Voraussetzung, daß die Geschwindigkeit des Punktes C durch die Bildlänge OC gegeben ist; das Bild v_c ist durch e_K zu legen, da $\mathfrak{v}_c \perp \mathfrak{w}_{21}$. Die graphische Auswertung der Gleichung $\mathfrak{v}_A = \mathfrak{v}_C + \mathfrak{v}_{AC}$ liefert die Größe der Geschwindigkeit des Punktes A; $\mathfrak{v}_{AC}$ bedeutet hierbei die Relativgeschwindigkeit des Punktes A gegen C, deren Bild zufolge der obigen Beziehung den Schnittpunkt e_K der Bilder v_c und v_A enthalten muß, wobei sich die Bilder v_A und t decken; anderseits muß auf dem Bilde v_{AC} auch der Antipol e_{AC} liegen, denn es ist $\mathfrak{v}_{AC} \perp AC$.

Durch Ziehen der entsprechenden Parallelen im Geschwindigkeitsplane gewinnt man die Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_A = \overrightarrow{oa}$ und $\mathfrak{v}_{AC} = \mathbf{ca}$. Da weiter $\mathfrak{v}_B \equiv \mathfrak{v}_A$, kann der Geschwindigkeitsplan durch Eintragen der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_D = \overrightarrow{od}$ leicht vervollständigt werden, wobei das Bild von $\mathfrak{v}_D$ durch die Antipole e_L und e_{DE} von $\mathfrak{L}$ und DE, das Bild von $\mathfrak{v}_{DB} = \overrightarrow{bd}$ durch den Punkt e_L und den Antipol e_{BD} von BD zu legen ist.

5. Ein **dreigliedriges räumliches Getriebe** mit Elementenpaaren von mehreren Freiheitsgraden ist in Abb. 5 wiedergegeben; die Glieder 3 und 2 sind ebenso wie Glied 2 und das feste Glied 1 durch je ein Elementenpaar von 2 Freiheitsgraden verbunden. Jedes dieser Elementenpaare gestattet eine Drehung um eine Achse (A_I bzw. A_{II}) und eine Schiebung längs dieser Achse. Glied 3 verbindet ein Kardangelenk mit 1 [1]).

[1]) Ein Modell dieses Getriebes wurde auf der Getriebelehre-Tagung 1928 in Dresden von Alt vorgeführt.

Da das Getriebe nur einen Freiheitsgrad besitzt, darf von der Schraubenbewegung des Gliedes 2 um die Achse A_I, deren Parameter nicht bekannt ist, nur eine Komponente, z. B. die Schiebungsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_{21}$ angenommen werden. Soll daraus der Geschwindigkeitszustand des Gliedes 3, welches eine sphärische Bewegung um D ausführt, ermittelt werden, so erfordert dies die Kenntnis der Geschwindigkeiten zweier Punkte dieses Gliedes [1]). Wir wählen hierfür den Punkt C und den Spurpunkt G der Achse A_{II}. Die absolute Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{G31}$ dieses letzteren (in Abb. 5c der Einfachheit halber v_G bezeichnet) fassen wir als Summe der Geschwindigkeit seines Deckpunktes auf dem Gliede 2 und seiner Relativgeschwindigkeit gegen diesen Deckpunkt auf, so daß

$$\mathfrak{v}_{G31} = \mathfrak{v}_{G21} + \mathfrak{v}_{G32} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6).$$

An dieser Stelle sei auf die auch im folgenden beibehaltene Geschwindigkeitsbezeichnung hingewiesen. Gehört allgemein ein Punkt A einem Gliede i einer kinematischen Kette an, so bedeutet $\mathfrak{v}_{Aik}$ die Relativgeschwindigkeit des Punktes A gegen seinen Deckpunkt auf dem Gliede k der Kette. Ist 1 das festgehaltene Glied, so bezeichnet nach obigem $\mathfrak{v}_{Ai1}$ die absolute Geschwindigkeit des Punktes A.

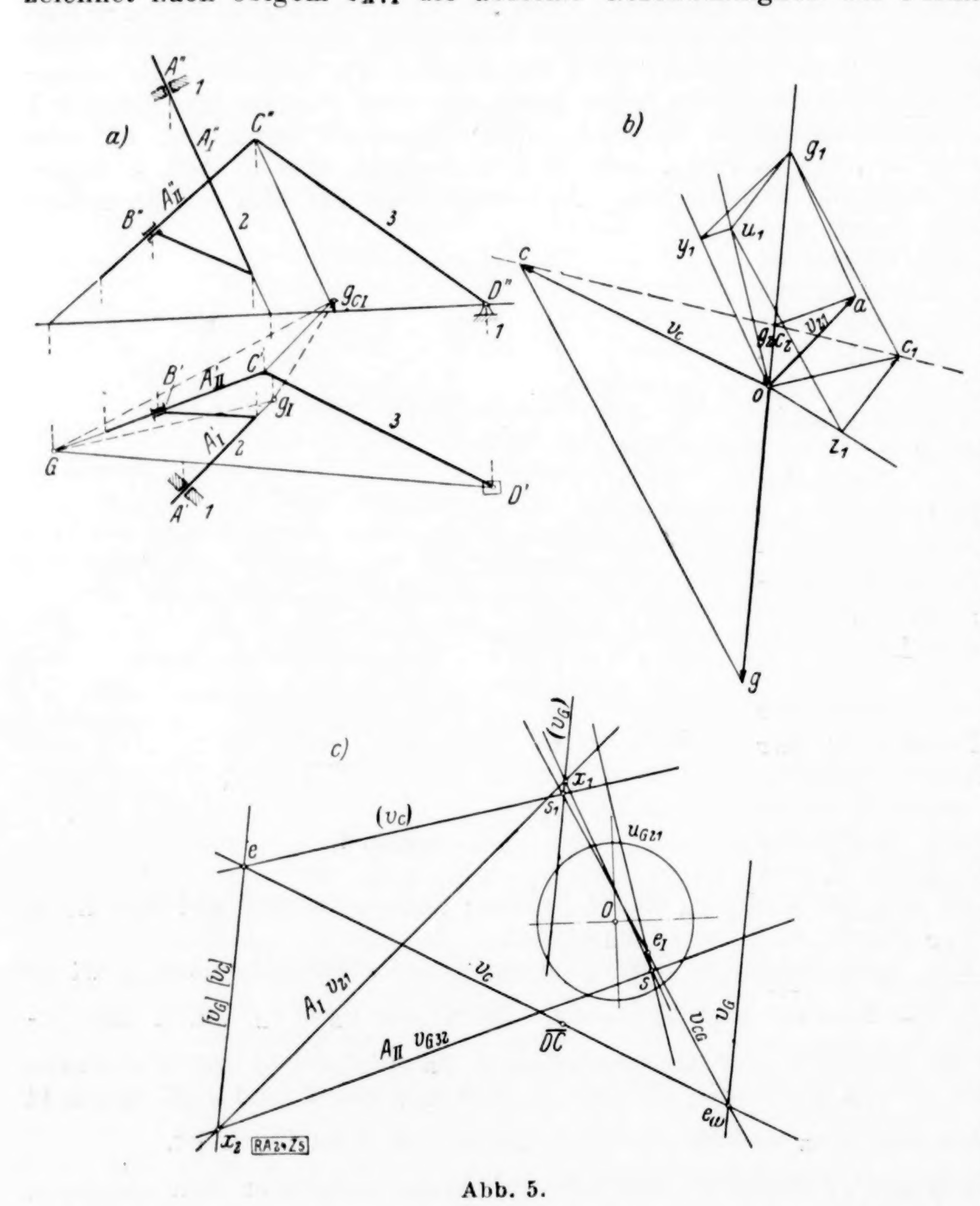


Abb. 5.

Die Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_{G32}$ ist, da der Punkt G der Achse A_{II} angehört, gleich der Schiebungsgeschwindigkeit der Relativbewegung von 3 gegen 2 und fällt daher in die Achse A_{II}. Es decken sich demnach auch die Bilder v_{G32} und A_{II} (Abb. 5c). Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{G21}$ entsteht durch Summierung der allen Punkten des Gliedes 2 gleichen Schiebungsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_{21}$ in der Richtung der Achse A_I und einer Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{u}_{G21}$ um diese Achse. Die erstere ist der Größe nach gegeben, sie besitzt im Geschwindigkeitsplane (Abb. 5b) die Länge oa, während ihr Bild mit dem Bilde A_I zusammenfällt. Das Bild u_{G21} führt durch den Antipol e_I von A_I und ist senkrecht auf der Verbindung von G mit g_I, dem Spurpunkte von A_I, denn es ist $\mathfrak{u}_{G21}$ gleich dem Momente des nach A_I fallenden Winkelgeschwindigkeitsvektors $\mathfrak{w}_{21}$ um G, dessen Bild die angegebene Richtung besitzt. Endlich ist uns eine Ebene bekannt, in welcher der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}_{G31}$ liegen muß; dies ist die Normalebene auf GD in G zufolge der sphärischen Bewegung des Gliedes 3 um D. Da der Punkt D der Grundrißebene angehört, ist der

[1]) Die Drehachse steht dann senkrecht auf den Richtungen dieser Geschwindigkeiten.

Grundriß und daher auch das Bild v_G von $\mathfrak{v}_{G31}$ senkrecht auf $G D'$ anzunehmen, die Lage dieses Bildes ist aber noch unbestimmt.

Führen wir die Größen $\mathfrak{v}_{21}$ und $\mathfrak{u}_{G21}$ in Gl. (6) ein, so geht diese über in:

$$\mathfrak{v}_{G31} = \mathfrak{v}_{21} + \mathfrak{u}_{G21} + \mathfrak{v}_{G32}$$

oder

$$\mathfrak{v}_{21} = \mathfrak{v}_{G31} - (\mathfrak{u}_{G21} + \mathfrak{v}_{G32}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Die durch diese Gleichung angedeutete Zerlegung der gegebenen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{21}$ kann durchgeführt werden, wenn man die Lage des Bildes von $\mathfrak{v}_{G31}$ willkürlich wählt. Der Schnittpunkt der Fehlannahme $(v_G) \perp D'G$ mit dem nach A_I fallenden Bilde v_{21} sei mit x_1 bezeichnet (Abb. 5c).

Die Auflösung von $\mathfrak{v}_{21}$ nach Gl. (7) erfordert folgende Linien im Geschwindigkeitsplane: $\overline{o g_1} \parallel (v_G)$, $a g_1 \parallel s x_1$ (s Schnittpunkt der Bilder v_{G32} und u_{G21}), $o y_1 \# a g_1$, $y_1 u_1 \parallel v_{G32}$, $o u_1 \parallel u_{G21}$.

Die Strecke $\overline{o u_1}$ bedeutet nach vorstehendem die der Annahme (v_G) entsprechende Drehgeschwindigkeit $(\mathfrak{u}_{G21}) = (\mathfrak{w}_{21}) \times \overrightarrow{g_I G}$. Die Relativgeschwindigkeit des Punktes C der Achse A_{II} gegen den Punkt G besitzt die Größe $\mathfrak{w}_{21} \times \overrightarrow{GC}$, was aus folgender Ueberlegung hervorgeht: Die Relativgeschwindigkeit zweier beliebiger Punkte C und G des Gliedes 3 wäre durch den Ausdruck $\mathfrak{w}_{31} \times \overrightarrow{GC}$ gegeben, worin $\mathfrak{w}_{31}$ den absoluten Winkelgeschwindigkeitsvektor dieses Gliedes angibt. Letzterer setzt sich entsprechend der resultierenden Drehung von 3 um die Achsen A_I und A_{II} aus den Teilkomponenten $\mathfrak{w}_{21}$ und $\mathfrak{w}_{32}$ zusammen, es ist daher

$$\mathfrak{v}_{CG} = (\mathfrak{w}_{21} + \mathfrak{w}_{32}) \times \overrightarrow{GC}$$

und im vorliegenden Falle

$$\mathfrak{v}_{CG} = \mathfrak{w}_{21} \times \overrightarrow{GC},$$

da die Richtungen $\mathfrak{w}_{32}$ und $\overrightarrow{GC}$ zusammenfallen.

Aus der bekannten Bildlänge $(u_{G21}) = \overline{o u_1}$ wird nun (v_{CG}), wenn der Durchstoßpunkt g_{cI}, der zu A_I Parallelen durch C eingetragen ist, aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $g_I G g_{cI}$ und $o u_1 z_1$ einfach bestimmt.

Es ist

$$o z_1 \perp g_I g_{cI}, \quad u_1 z_1 \perp G g_{cI}, \quad \overrightarrow{u_1 z_1} = (\mathfrak{w}_{21}) \times \overrightarrow{GC} = (\mathfrak{v}_{CG}).$$

Die absolute Geschwindigkeit des Punktes C setzt sich nach der Grundgleichung der Zweipunktführung aus der Geschwindigkeit des Punktes G und der Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_{CG}$, somit für die erste Fehlannahme aus den Strecken $\overline{o g_1}$ und $\overline{u_1 z_1}$ zusammen. Die Strecke $\overline{o c_1}$ bildet nun die dieser Fehlannahme zugeordnete Bildlänge der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{C31}$. Für weitere Fehlannahmen von x auf v_{21} würden sich die Punktreihen $g_1 g_2 \ldots$, $y_1 y_2 \ldots$, $u_1 u_2 \ldots$, $z_1 z_2 \ldots$ auf den entsprechenden, durch o gehenden Trägern ergeben. Die Reihen y, u, z entstehen durch Parallelprojektion der Reihe g, sind daher dieser ähnlich. Ebenso ist ohne weiteres aus der Abbildung ersichtlich, daß dann auch die Punkte $c_1 c_2 \ldots$ eine der Reihe der Punkte $g_1 g_2 \ldots$ ähnliche Punktreihe erfüllen. Dies bedingt gleichzeitig, daß alle möglichen Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_{C31}$ einer Ebene E angehören. Der Abbildungspunkt dieser Ebene bestimmt sich am einfachsten als Schnittpunkt der Bilder zweier durch Fehlannahmen gewonnener Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_{C31}$. Da die Vektoren $\mathfrak{v}_{G31}$, $\mathfrak{v}_{CG}$, $\mathfrak{v}_{C31}$ in einer Ebene liegen, ist das Bild $(v_c) \parallel o c_1$ durch den Schnittpunkt s_1 der Bilder (v_G) und v_{CG} zu legen; letzteres ist die Normale auf $G g_{cI}$ durch e_I. Als zweite Fehlannahme $[v_G]$ wurde jene gewählt, bei welcher der Schnittpunkt x_2 der Bilder v_G und v_{21} mit dem Schnittpunkte der Bilder v_{21} und A_{II} zusammenfällt. Bei singemäßer Anwendung der Konstruktion, welche den Punkt c_1 lieferte, ergibt sich der Punkt c_2, wenn man im Geschwindigkeitsplane die Gerade $o g_1$ mit der durch a gelegten Parallelen zu v_{G32} zum Schnitt bringt. Das Bild $[v_C]$ deckt sich dann mit dem Bilde $[v_G]$. Der Schnittpunkt e der Bilder (v_C) und $[v_C]$ ist der gesuchte Abbildungspunkt der Ebene E. Da die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{C31}$ anderseits normal auf DC sein muß, ist das Bild v_C der richtigen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{C31}$ die Verbindung von e mit dem Antipole $\overline{DC}$. Die Parallele zu v_C durch o schneidet die Gerade der Punkte $c_1 c_2 \ldots$ im richtigen Endpunkte c, so daß $\overrightarrow{oc}$ die Bildlänge der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{C31}$ ist. Aus $\mathfrak{v}_{C31}$ läßt sich die wahre Bildlänge v_{G31} rückkonstruieren, wenn $cg \parallel v_{CG}$ gezogen

wird, während das richtige Bild v_G durch den Schnittpunkt e_ω der Bilder v_C und v_{CG} führt. Da das Glied 3 eine sphärische Bewegung ausführt, stehen die Geschwindigkeitsvektoren aller Systempunkte senkrecht auf der Drehachse dieses Gliedes. Der eben gewonnene Schnittpunkt e_ω der Geschwindigkeitsbilder zweier Systempunkte ist daher der Antipol der gesuchten Drehachse, das Bild der Drehachse selbst die Antipolare dieses Punktes. Durch die Richtung der Achse und die Größe der Geschwindigkeit eines Punktes, z. B. der des Punktes C, ist aber der Geschwindigkeitszustand des Gliedes 3 vollkommen festgelegt.

6. Abb. 6 zeigt ein **viergliedriges Getriebe.** Glied 1 wird festgehalten, Glied 2 ist durch ein Zylinderpaar (I) an 1 angeschlossen, ebenso 2 an 3 (II). Glied 4 steht mit 3 durch ein Kreuzgelenk (Achsen III und IV), mit 1 durch ein Kugelgelenk oder Kardangelenk in Verbindung. Der Geschwindigkeitszustand des Gliedes 2 ist bekannt. Es soll die Geschwindigkeit eines dem Gliede 4 angehörigen Punktes E ermittelt werden.

Die absolute Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{c31}$ des Punktes C ist unter Beibehaltung der Bezeichnungsweise in (5) gegeben durch:

$$\mathfrak{v}_{c31} = \mathfrak{v}_{c21} + \mathfrak{v}_{c32} \qquad (8).$$

In dieser Gleichung ist $\mathfrak{v}_{c21}$ als bekannt anzusehen, da der Geschwindigkeitszustand des Gliedes 2 gegeben ist. Die Richtung der relativen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{c32}$ ist die Normale auf die Ebene der Verbindung BC und der Achse II, während $\mathfrak{v}_{c31}$ jedenfalls in einer Normalebene auf DC liegen muß, entsprechend der sphärischen Bewegung des Gliedes 4 um D.

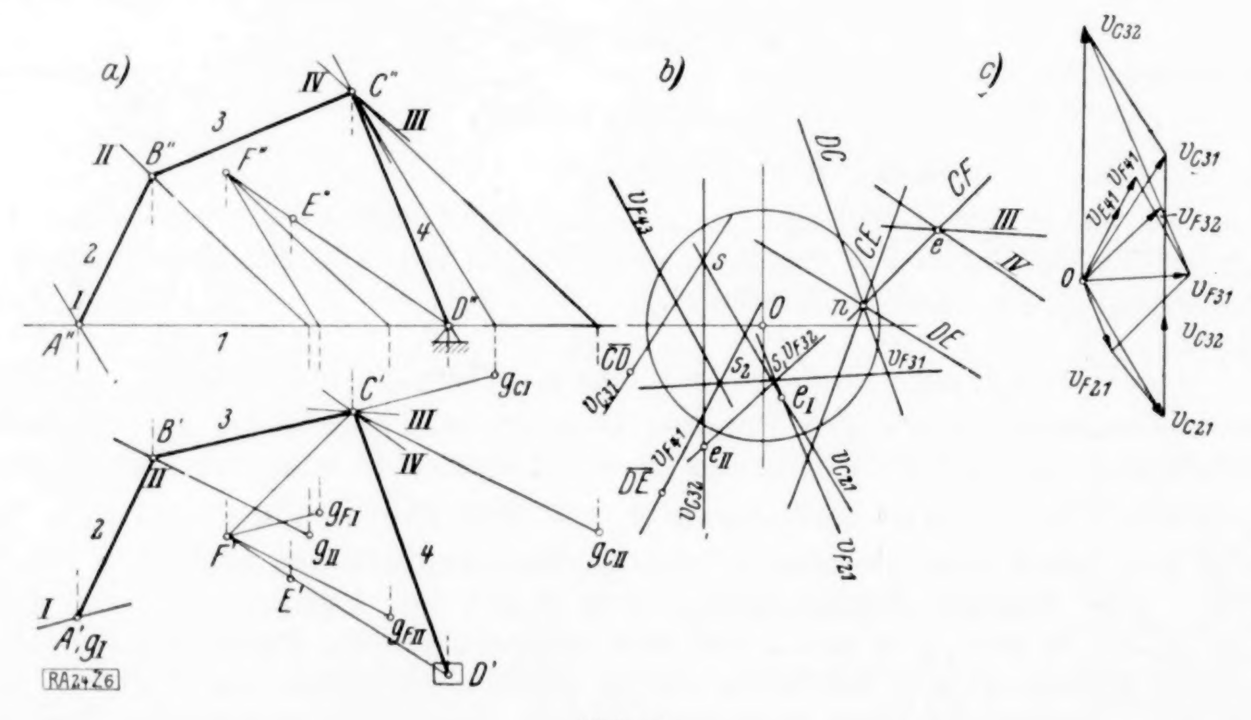


Abb. 6.

Zur konstruktiven Ermitttlung von $\mathfrak{v}_{c31}$ wurden in Abb. 6b die Antipole e_I und e_{II} der Achsen I und II, sowie der Antipol $\overline{CD}$ der Strecke CD eingetragen. Weiters wurden in Abb. 6a zunächst der Spurpunkt g_{II} der Achse II und die Spurpunkte g_{c1} und g_{cII} der durch C gelegten Parallelen zu den Achsen I und II bestimmt; der Spurpunkt g_I fällt nach A. Das Bild v_{c21} der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{c21}$ ist nun durch $e_I \perp g_I g_{cI}$ zu legen, denn es ist $\mathfrak{v}_{c21}$ gleich dem Momente des Drehvektors $\mathfrak{w}_{21}$ in I um C, ebenso $v_{c32} \perp g_{cII} g_{II}$ durch e_{II}. Da diese beiden Vektoren und der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}_{c31}$ nach Gl. (8) einer Ebene angehören, führt das Bild von $\mathfrak{v}_{c31}$ durch den Schnittpunkt s der Bilder v_{c21} und v_{c32}; da anderseits $\mathfrak{v}_{c31}$ normal auf CD steht, ihr Bild daher den Antipol $\overline{CD}$ enthalten muß, ist letzteres durch die Verbindung der Punkte s und $\overline{CD}$ gegeben. Die Ermittlung der Bildgrößen der Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_{c32}$ und $\mathfrak{v}_{c31}$ aus der gegebenen Bildlänge von $\mathfrak{v}_{c21}$ erfolgt im Geschwindigkeitsplane, Abb. 6c, durch Ziehen der entsprechenden Bildparallelen.

Für die Ermittlung der Geschwindigkeit des Punktes C waren die Richtungen der Achsen III und IV vollkommen gleichgültig, wohl aber sind diese von Einfluß auf den Geschwindigkeitszustand der Bewegung des Gliedes 4 um die Gerade DC. Diese Be-

wegung wäre beispielsweise bei Vorhandensein eines Kugelgelenkes in C keine zwangläufige mehr, da sich das Glied 4 dann unabhängig von der übrigen Getriebebewegung um CD drehen könnte. Um nun bei gegebener Richtung der Achsen III und IV und für den angenommenen Geschwindigkeitszustand des Getriebes die Geschwindigkeit eines Punktes E des Gliedes 4 zu bestimmen, suchen wir zunächst den Durchstoßpunkt F der Verbindung ED mit der Ebene λ der Achsen III und IV und bestimmen vorerst die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{F41}$ dieses Punktes[1]). Die Resultierende der Winkelgeschwindigkeitsvektoren $\mathfrak{w}_{III}$ und $\mathfrak{w}_{IV}$ in III und IV liegt jedenfalls in der von den beiden Achsen gebildeten Ebene λ. Der Punkt F, der auch der Ebene λ angehört, erhält durch die Drehung um diesen resultierenden Winkelgeschwindigkeitsvektor, gleichgültig welche Richtung dieser besitzt, eine Geschwindigkeit, die senkrecht auf der Ebene λ steht. Wir sind daher in der Lage, die Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{F43}$ des Punktes F gegen seinen Deckpunkt auf dem Gliede 3 anzugeben, während wir von seiner absoluten Geschwindigkeit wissen, daß sie in einer Normalebene auf DF liegen muß. Zur Bestimmung der Geschwindigkeit des Punktes F können folgende Beziehungen herangezogen werden:

$$\mathfrak{v}_{F41} = \mathfrak{v}_{F31} + \mathfrak{v}_{F43}, \qquad \mathfrak{v}_{F31} = \mathfrak{v}_{F21} + \mathfrak{v}_{F32}.$$

Die Größen der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{F21}$ des Deckpunktes von F auf dem Gliede 2 und der relativen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{F32}$ können von $\mathfrak{v}_{c21}$ und $\mathfrak{v}_{c32}$ auf Grund des Aehnlichkeitssatzes einer räumlichen Bewegung einfach abgeleitet werden[2]).

Dieser Aehnlichkeitssatz sagt aus, daß die Figur der Geschwindigkeitspunkte der Systempunkte eines Körpers, welcher eine Schrauben- oder Drehbewegung ausführt, ähnlich ist der Figur der Spurpunkte der durch die Systempunkte gelegten Parallelen zur Schrauben- bzw. Drehachse und gegen diese um 90^0 gedreht ist. Somit ergibt sich z. B. die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{F21}$ aus $\mathfrak{v}_{c21}$ durch folgende Konstruktion: man bestimmt zunächst den Spurpunkt g_{FI} der durch F gelegten Parallelen zur Achse I und macht das Dreieck $o\, v_{c21}\, v_{F21}$ (Abb. 6c) ähnlich dem Dreiecke $g_I\, g_{cI}\, g_{FI}$. Ebenso ergibt sich $\mathfrak{v}_{F32}$ aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $g_{II}\, g_{cII}\, g_{FII}$ und $o\, v_{c32}\, v_{F32}$, wobei g_{FII} den Durchstoßpunkt der durch F führenden Parallelen zur Achse II bedeutet. Die Summierung der auf diese Weise gewonnenen Vektoren $\mathfrak{v}_{F21}$ und $\mathfrak{v}_{F32}$ zu $\mathfrak{v}_{F31}$ erfolgt ebenfalls im Geschwindigkeitsplane; andererseits sind die Bilder dieser Geschwindigkeitskomponenten, da es sich um reine Drehbewegungen handelt, die Geschwindigkeiten daher senkrecht auf den entsprechenden Drehachsen stehen müssen, durch deren Antipole zu legen; v_{F21} führt demnach durch e_I, v_{F32} durch e_{II}. Das Bild v_{F31} ist dann durch ihren Schnittpunkt s_1 zu legen. Die relative Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{F43}$ steht senkrecht auf der Ebene λ, deren Abbildungspunkt e der Schnittpunkt der Bilder der Achsen III und IV ist; ihr Bild v_{F43} ist daher die Antipolare des Punktes e. Das Bild der absoluten Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{F41}$ ist die Verbindung des Schnittpunktes s_2 der Bilder v_{F31} und v_{F43} und des Antipoles $\overline{DE}$ des Bildes der Geraden DEF. Die Größenbestimmung von $\mathfrak{v}_{F41}$ erfolgt wieder im Geschwindigkeitsplane durch Ziehen der Parallelen zu den zugehörigen Bildern. Die Geschwindigkeit des Punktes E kann nun einfach dadurch gewonnen werden, daß man die Bildlänge v_{F41} im Geschwindigkeitsplane ähnlich der Punktreihe $D'E'F'$ teilt; ihr Bild deckt sich mit v_{F41}.

Soll die Größe der Winkelgeschwindigkeiten in den einzelnen Drehachsen angegeben werden, wie dies bei Beschleunigungskonstruktionen erforderlich ist, so kann dies durch Umkehrung der Momentenkonstruktion geschehen. Es ist z. B. $\mathfrak{v}_{c32}$ das Moment der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{w}_{32}$ in II um C. Von diesem Momente kennt man Bildlänge und Bild, während das Bild von $\mathfrak{w}_{32}$ in das Bild der Achse II fällt. Diese Angaben würden aber zur Bestimmung der Bildlänge ω_{32} genügen.

7. Geschwindigkeitsplan eines **fünfgliedrigen Getriebes** mit 2 Kreuzgelenken. Ein solches ist in Abb. 7 dargestellt. In den Punkten A, B, C sind die Glieder 2 — 1, 3 — 2, 4 — 3 durch Drehpaare (Achsen I, II, III), die Glieder 4 — 5, 5 — 1 in D unß E durch Kreuzgelenke, deren Achsen ebenfalls eingetragen sind, verbunden. Der Geschwindigkeitszustand des Gliedes 2 gegen 1 ist angenommen, es ist daraus der des

[1]) Zur Bestimmung des Durchstoßpunktes F wurde die in (1) gezeigte Konstruktion benützt. Die hierzu erforderlichen Bilder der Geraden DC und DE sind in Abb. 6b eingetragen, ihr Schnittpunkt n wird mit dem Schnittpunkte e der Bilder III und IV verbunden und die Gerade $D'E'$ mit der Parallelen zu ne im Punkte F' zum Schnitt gebracht.

[2]) Vgl. Federhofer, »Graph. Kinematik etc.« S. 13.

Gliedes 4 zu bestimmen. Die von den Achsen der Gelenke in D und E gebildeten Ebenen ε_D und ε_E bilden sich in den Punkten e_D und e_E ab (Abb. 7c). Die Punkte der Schnittlinie S dieser beiden Ebenen besitzen die Eigenschaft, daß die Geschwindigkeiten ihrer Punkte als Systempunkte des Gliedes 4 senkrecht auf S sein müssen. Dies geht aus folgendem hervor: es bedeutet $\mathfrak{w}_{51}$ den resultierenden Winkelgeschwindigkeitsvektor des Gliedes 5 gegen 1, ebenso $\mathfrak{w}_{45}$ den Drehvektor von 4 gegen 5; die Gerade S schneidet nun jedenfalls die genannten Vektoren. Die Geschwindigkeit irgendeines Punktes auf S ist durch die Summe der äußeren Produkte der Vektoren $\mathfrak{w}_{51}$ und $\mathfrak{w}_{45}$ um diesen Punkt gegeben und steht daher senkrecht auf S. Wir bestimmen zunächst den Spurpunkt K der Schnittlinie, deren Bild die Verbindung der Abbildungspunkte e_D und e_E ist. Da der Punkt E in der Grundrißebene liegt, genügt es, den Spurpunkt g_{DS} der durch D gelegten Parallelen zu S aufzusuchen; K liegt dann im Schnittpunkte der durch E bzw. g_{DS} gelegten Parallelen zu den Geraden $O\,e_E$ bzw. $O\,e_D$.

Die absolute Geschwindigkeit des Punktes K folgt aus der Gleichung:

$$\mathfrak{v}_{K41} = \mathfrak{v}_{K21} + \mathfrak{v}_{K32} + \mathfrak{v}_{K43} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (9).$$

Hierin ist nur von $\mathfrak{v}_{K21}$ Größe und Richtung bekannt, während wir von $\mathfrak{v}_{K32}$ und $\mathfrak{v}_{K43}$ nur die Richtungen angeben können. Es steht $\mathfrak{v}_{K32}$ bzw. $\mathfrak{v}_{K43}$ auf der von K und der Achse II bzw. III gebildeten Ebene senkrecht; die entsprechenden Bilder führen durch die Antipole e_{II} und e_{III}. Da K selbst in der Grundrißebene liegt, werden zunächst nur die Spurpunkte g_{II} und g_{III} der Achsen II und III benötigt; das Bild v_{K32} steht dann senkrecht auf der Geraden $K\,g_{II}$ durch e_{II}, das Bild v_{K43} senkrecht auf $g_{III}\,K$ durch e_{III}; ihr Schnittpunkt ist mit s bezeichnet. Das Bild v_K der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{K41}$ führt, da

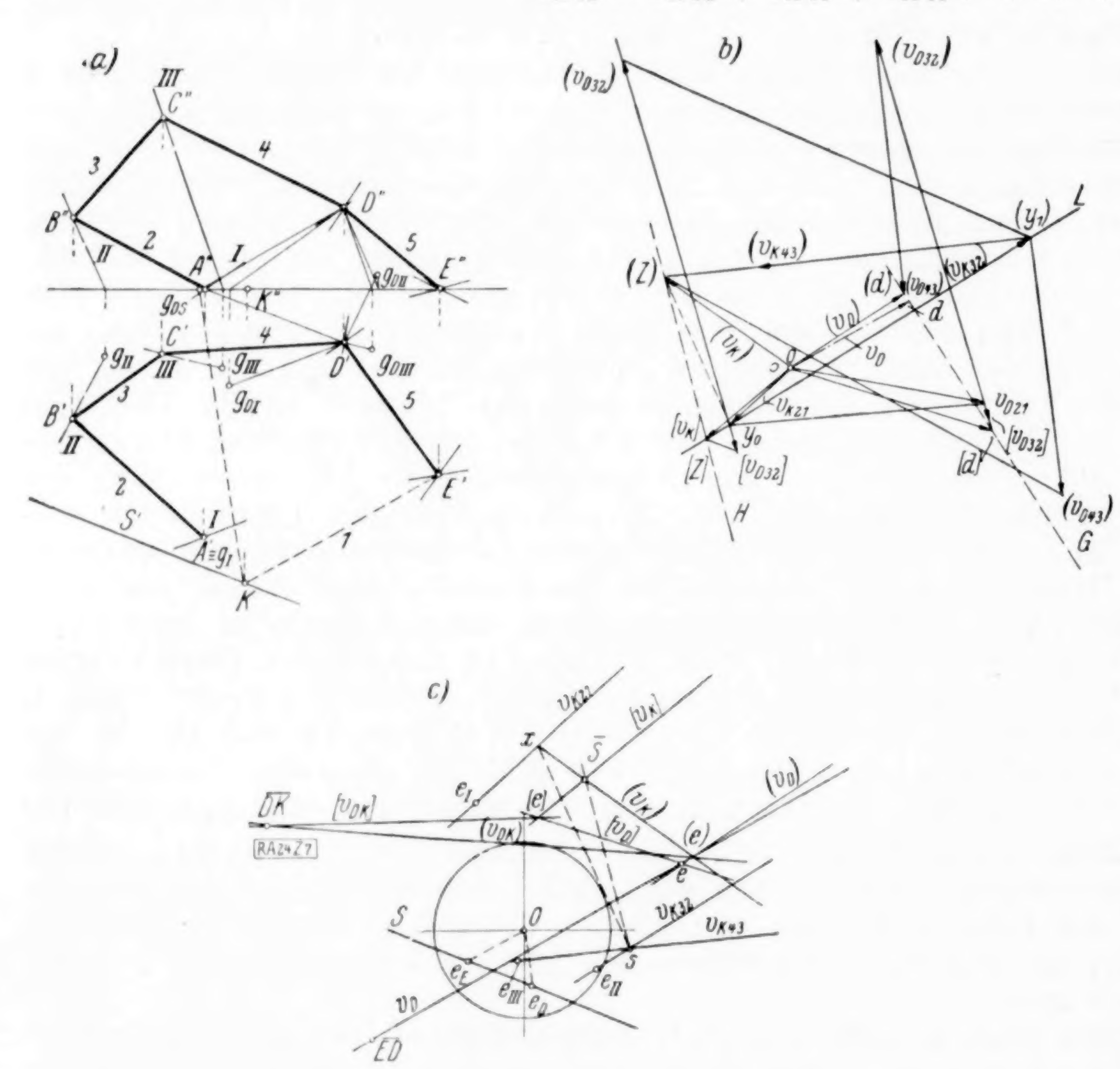


Abb. 7.

$\mathfrak{v}_{K41} \perp S$, durch $\bar{S}$, den Antipol der Geraden S. Wir nehmen zunächst die Richtung dieses Bildes willkürlich an und bringen die mit (v_K) bezeichnete Gerade mit dem Bilde der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{K21}$ im Punkte x zum Schnitt, wobei das Bild $v_{K21} \perp K\,g_I$ durch e_I zu legen ist. Die Verbindung $x\,s$ gibt die Richtung der Resultierenden aus den Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_{K32}$ und $\mathfrak{v}_{K43}$. Die Zerlegung des der Größe nach gegebenen Vektors $\mathfrak{v}_{K21}$ nach den übrigen in Gl. (9) vorkommenden Vektoren wurde im Geschwindigkeitsplane (Abb. 7b) durchgeführt; es lassen sich hier aus $v_{K21} = \overline{o\,y_0}$ die Bildlängen $(v_K) = \overline{o(z)}$, (v_{K32}) und (v_{K43}) bestimmen[1]). Wir sind nun aber auch in der Lage, die der Fehlannahme (v_K) zugeordnete Geschwindigkeit des Getriebepunktes D auf Grund der Gleichung:

$$\mathfrak{v}_{D41} = \mathfrak{v}_{D21} + \mathfrak{v}_{D32} + \mathfrak{v}_{D43}$$

[1]) Die Bildlängen der absoluten Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_{K41}$, $\mathfrak{v}_{D41}$ ... sind der Einfachheit halber mit v_K, v_D ... bezeichnet.

zu bestimmen. Die auf der rechten Gleichungsseite stehenden Vektoren sind aus den bereits bekannten Vektoren mit Hilfe des Aehnlichkeitssatzes bestimmbar. Es erfordert dies zunächst das Eintragen der Spurpunkte $g_{DI}, g_{DII}, g_{DIII}$, der durch D gelegten Parallelen zu den Achsen I, II, III. Nun läßt sich beispielsweise die Bildlänge (v_{D32}) aus (v_{K32}) einfach konstruieren, denn es muß (v_{D32}) senkrecht sein zu $g_{II}\, g_{DII}$, während die Verbindung der Spitzen dieser Vektoren die Relativgeschwindigkeit der Punkte K und D darstellt und als solche auf der Verbindung der Spurpunkte $K\, g_{DII}$ normal steht. Auf gleiche Weise wird (v_{D13}) aus (v_{K43}) gewonnen und endlich durch Zusammensetzung der einzelnen Komponenten die Bildlänge $o\,(d)$ von $(\mathfrak{v}_{D41})$.

Dreht sich nun die willkürlich angenommene Richtung (v_K) um den Punkt $\overline{S}$, d. h. wandert der Schnittpunkt x auf dem Bilde v_{K21}, so ändert sich auch die Bildgröße v_K; die Endpunkte aller Vektoren $\mathfrak{v}_{K41} = \overrightarrow{oz}$ müssen, da es sich um die Zerlegung einer gegebenen Bildlänge nach zwei Wirkungslinien handelt, von denen die eine stets durch den Punkt $\overline{S}$, die andere immer durch s führt, eine Gerade H parallel $\overline{S}\,s$ erfüllen[1]). Denken wir uns z auf H fortschreiten, so erfüllen die Endpunkte y_1 von v_{K32} auf der durch den Endpunkt y_0 von v_{K21} gelegten Richtung v_{K32} eine der Punktreihe z ähnliche Punktreihe; denn es entsteht die Reihe der Punkte y_1 durch Parallelprojektion der Punktreihe z, wobei die Projektionsrichtung parallel der Richtung v_{K43} ist. Es würden somit auch die Bildlängen $y_1\, z$ dieser Geschwindigkeit von einem festen Punkt aus aufgetragen, eine der Reihe z ähnliche ergeben. Nun werden aber die Bildlängen v_{D32} und v_{D43} aus den Längen v_{K32} und v_{K43} durch Zerlegung in je zwei vorgegebene Richtungen gewonnen. Es bilden daher auch die Endpunkte dieser Vektoren Punktreihen, die beide ähnlich der Reihe z und daher auch untereinander ähnlich sind. Die Bildlänge $v_D = \overline{o\,d}$ entsteht durch Addition der Bildlängen v_{D21}, v_{D32} und v_{D43}; da erstere durch den Geschwindigkeitszustand des Gliedes 2 gegeben ist, die beiden letzteren aber bei Richtungsänderungen von v_K ähnliche Punktreihen erfüllen, so wandert der Geschwindigkeitspunkt d in diesem Falle auf einer durch den bereits bekannten Punkt (d) führenden Geraden G. Zur Festlegung dieser Geraden wurde die Geschwindigkeit v_D für eine zweite Fehlannahme bestimmt und zwar wurde hierfür jene gewählt, bei welcher die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{K43}$ verschwindet; der Endpunkt $[z]$ fällt dann in den Schnittpunkt der Geraden H und L, auf der die Punkte $y_0\,(y_1)$ . . . liegen. Wird die oben beschriebene Konstruktion analog durchgeführt, so folgt daraus der Geschwindigkeitspunkt $[d]$ als Endpunkt der Bildlänge $[v_D]$. Die Verbindung $(d)\,[d]$ ist die Gerade G, auf welcher die Endpunkte aller Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_{D41}$ liegen müssen. Anderseits ist dadurch auch jene Ebene festgelegt, welcher alle Geschwindigkeitsvektoren $\mathfrak{v}_{D41}$ parallel sind; es ist dies die Ebene, welche sich durch den Punkt o und die Gerade G legen läßt. Den Abbildungspunkt e dieser Ebene bestimmen wir als Schnittpunkt der Bilder (v_D) und $[v_D]$.

Das Aufsuchen der Bilder (v_D) und $[v_D]$ geschieht wie in (5) mit Hilfe der Relativgeschwindigkeit des Punktes D gegen K. Man legt, um z. B. das Bild $[v_D]$ zu konstruieren, durch den Antipol $\overline{DK}$ das Bild der Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_{DK}$ parallel zur Verbindung $[z]\,[d]$ im Geschwindigkeitsplane; es trifft das durch S führende Bild $[v_K]$ im Punkte $[e]$, durch welchen auch das Bild $[v_D]$ gehen muß. Auf gleiche Weise erhält man das Bild (v_D), welches $[v_D]$ im gesuchten Punkte e schneidet. Das Bild v_D der wirklichen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{D41}$ ist endlich die Verbindung des Punktes e mit dem Antipole $\overline{ED}$ der Geraden ED, auf welcher $\mathfrak{v}_{D41}$ senkrecht stehen muß. Die Parallele hiezu durch o schneidet die Gerade G im Punkte d und es ist die Bildlänge $v_D = \overline{o\,d}$.

Aus der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{D41}$ können die richtige Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{K41}$ sowie deren Komponenten rückkonstruiert werden. Die Konstruktion der Geschwindigkeit eines beliebigen Getriebepunktes aus den nun bekannten Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_{D41}$ oder $\mathfrak{v}_{K41}$ bietet dann keine Schwierigkeiten mehr; sie kann auf gleiche Weise erfolgen wie z. B. die Bestimmung der Geschwindigkeit $(\mathfrak{v}_{D41})$ aus $(\mathfrak{v}_{K41})$.

Die eben besprochene Konstruktion beruht darauf, daß man von zwei Punkten des Gliedes 4, welche nicht der Achse III angehören, Ebenen angeben kann, in denen die Geschwindigkeitsvektoren dieser Punkte liegen müssen. Es sind dies die Normalebenen auf S im Punkte K, bzw. auf DE in D. Dieselben Voraussetzungen treffen auch in ähnlich aufgebauten Getrieben zu, worauf im nächsten Abschnitte noch näher hingewiesen wird.

[1]) Vergl. K. Federhofer: »Gr. Kinematik« usw., S. 42.

8. Allgemeine Bemerkungen. Die in (5), (6) und (7) durchgeführten Konstruktionen können auch für eine Reihe von Getrieben mit ähnlichem Aufbaue herangezogen werden. So sind z. B. bei dem Getriebe in Abb. 8a (Drehachsen I, II, Drehschiebepaare in C und Kardangelenk in D) dieselben Vorbedingungen gegeben wie bei dem viergliedrigen Getriebe in Abb. 6 (Abschnitt 6). Zur Festlegung des Geschwindigkeitszustandes der Glieder 3 und 4 ist an Stelle des in (6) verwendeten Punktes C der Punkt E einzuführen, in welchem das Lot von D auf die Drehachse III diese trifft. Dieser Punkt des Gliedes 3 besitzt eine Geschwindigkeit, die senkrecht auf seiner Verbindung mit dem Punkte D steht, was hier für den Punkt C nicht zutrifft.

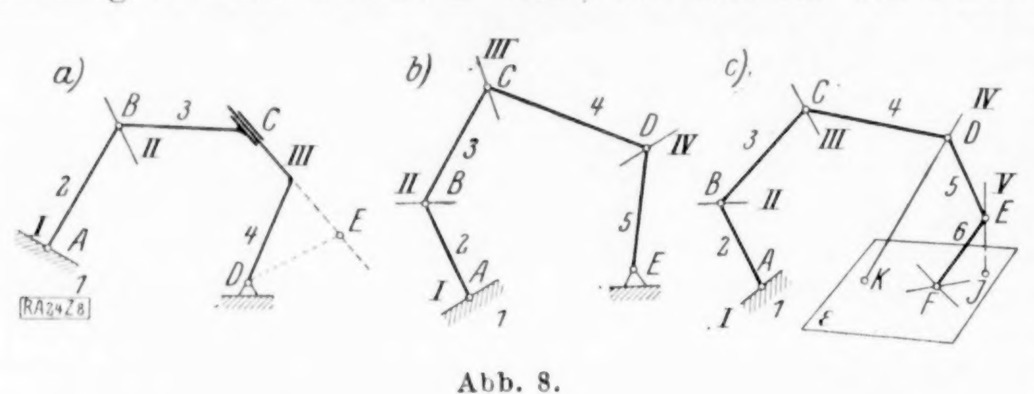


Abb. 8.

Der Geschwindigkeitsplan des fünfgliedrigen Getriebes in Abb. 8b (Drehachsen in A, B, C, D, Kardangelenk in E) ist nach der in (7) beschriebenen Methode zu entwerfen, da hier die Geschwindigkeiten aller Punkte des Gliedes 4 auf der Achse IV bestimmten Ebenen angehören; es sind dies die Normalebenen ihrer von E aus gemessenen Ortsvektoren. Es kann daher an Stelle des Spurpunktes K der Schnittlinie S in Abb. 7 mit Vorteil der Spurpunkt der Achse IV verwendet werden, während die übrige Konstruktion unverändert bleibt. Dasselbe gilt für das sechsgliedrige Getriebe mit 5 Drehachsen und einem Kreuzgelenk nach Abb. 8c; bedeuten hier K und J die Schnittpunkte der Achsen IV und V mit der Ebene ε der Achsen des Kreuzgelenkes, $\mathfrak{n}$ die Flächennormale dieser Ebene, so kann sich der Punkt K nur in einer Ebene bewegen, die durch die Gerade $\mathfrak{n}$ und durch die Flächennormale der Ebene $(V\,K)$ bestimmt ist, während der Geschwindigkeitsvektor des Punktes J einer Ebene, gebildet von der Normalen $\mathfrak{n}$ und der Flächennormalen der Ebene $(IV\,J)$, angehören muß. Somit liegt wieder der in (7) behandelte Fall vor.

Zum Schlusse sei noch erwähnt, daß auch das Entwerfen von Beschleunigungsplänen einfacher Raumgetriebe auf ähnliche Weise erfolgen kann wie das Zeichnen von Geschwindigkeitsplänen dieser Getriebe, was in der eingangs erwähnten Arbeit des Verfassers an einem Beispiel gezeigt wurde [1]. 24

Die einfach geführten Kapillar- und Schwere-Wellen in fließenden Mitteln. II.

Von **KARL ULLER** in Gießen.

1. Einleitung. Im ersten Teil [2]) haben wir die geführten Wellen behandelt, die an der Grenze zweier fließender Mittel möglich sind, falls gar keine äußeren Kräfte und falls nur Grenzflächenspannungen existieren. Es gibt in beiden Fällen keine Flußgeschwindigkeiten, bei denen sie nicht möglich wären. Nach dem Standwechsel-Verfahren dagegen wären sie im ersteren Falle überhaupt unmöglich, im letzteren Falle möglich, doch sind die Formeln in Wahrheit falsch, wenn die beiden Flußgeschwindigkeiten verschieden sind. Im vorliegenden zweiten Teil wenden wir uns den reinen Schwere-Wellen zu. Die beigegebenen Schaukurven sind nicht maßstäblich gezeichnet, sind daher auch nicht untereinander den Abmessungen nach vergleichbar; sie geben nur den allgemeinen Charakter der Beziehungen wieder. Da die Wellengeschwindigkeiten $\nu'/\mathfrak{w}_i'$ proportional sind den Wellenlängen $2\,\pi/\mathfrak{w}_i'$, gemessen längs U, so stellen die Wellengeschwindigkeits-Kurven zugleich auch die Wellenlängen-Kurven in einem anderen Maßstab dar. Sind die Wellengeschwindigkeiten sehr klein, so sprechen wir passend von Kriech-Wellen. Man hat bei ihnen den Eindruck, als ob die geführte Welle an ihrem Orte verharre wie z. B. bei der Rippel-Wolken in der Atmosphäre. Den Ausdruck: stationäre Wellen vermeiden wir; er ist ein Widerspruch in adjecto, denn eine Welle ohne Fortpflanzungsgeschwindigkeit gibt es nicht.

[1]) Vergl. Fußnote [1]) S. 274.

[2]) K. Uller: Die einfach geführten Kapillar- und Schwere-Wellen in fließenden Mitteln. I. Diese Zeitschr., Bd. 9 (1929), S. 305.

2. Die reine Schwere-Welle; $c = 0$. Auch hier kommen von den beiden Flußgeschwindigkeiten $\mathfrak{v}_1$ über $\mathfrak{v}_2$ nur ihre Projektionen $(\mathfrak{j}\,\mathfrak{v}_1) = \beta_1$ und $(\mathfrak{j}\,\mathfrak{v}_2) = \beta_2$ auf die Richtung $\mathfrak{j}$ der Welle längs U in Betracht. Mit den Abkürzungen ($\mathfrak{k}$ grad Π) $= g =$ Schwerebeschleunigung, $\sqrt{\mathfrak{w}_t^2} = x$, $(\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}_t) = \beta\,x$ schreibt sich nun die Gl. (7) § 4 einer vorangehenden Abhandlung [1]) in Verbindung mit (3) daselbst

$$\left\{\frac{D_2}{\nu - \beta_2 x} - \frac{D_1}{\nu - \beta_1 x}\right\} g = \frac{\nu - \beta_2 x}{x} D_2 + \frac{\nu - \beta_1 x}{x} D_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

was sich überführen läßt in

$$\left.\begin{array}{l}(\pm)(D_1 \beta_1 + D_2 \beta_2)\beta_1 \beta_2 \cdot x^3 - \{2\nu(D_1 + D_2)\beta_1\beta_2 + \nu(D_1 \beta_1^2 + D_2 \beta_2^2) \\ \quad - (\pm)(D_1 \beta_2 - D_2 \beta_1) g\} \cdot x^2 + (\pm)\{2\nu^2(D_1\beta_1 + D_2\beta_2) + \nu^2(D_1\beta_2 + D_2\beta_1) \\ \qquad + (\pm)\nu(D_2 - D_1) g\} \cdot x - (D_1 + D_2)\nu^3 = 0\end{array}\right\} \quad (1').$$

Wir stoßen also auf Kurven 6. Grades in $(\beta; x)$. Mit dem oberen Wert in dem Einsatz $(\pm)$ sind nur die Wurzeln mit positivem x' zulässig, mit dem unteren nur die Wurzeln mit negativem x' (siehe a. a. O. § 4). Selbst wenn beide Dichten gleich sind, gibt es diese geführten Schwerewellen, es sei denn, daß zufällig auch die beiden Flußgeschwindigkeiten gleich sind.

Nach (1) bzw. (1') gibt es 4 Fälle, in denen sich die kubische Gleichung zu einer quadratischen ermäßigt: $\beta_1 = \beta_2$; $D_1\beta_1 + D_2\beta_2 = 0$; $\beta_1 = 0$; $\beta_2 = 0$, die wir im folgenden analysieren wollen. Sie sind besonders von Bedeutung in der Geophysik (Dichtebeständige Wellen in und an der Troposphäre bzw. in und an den Ozeanen).

A. Beide Mittel haben gleiche Geschwindigkeits-Projektion auf die Richtung $\mathfrak{j}$ der einfachen Zweimittelwelle, $\beta_1 = \beta_2 = \beta$. (Abb. 1 und 2). Dann geht (1) über in

$$\beta^2 x^2 - (\delta\,g + (\pm)\,2\,\nu\,\beta)\,x + \nu^2 = 0\,, \qquad \delta = \frac{D_2 - D_1}{D_2 + D_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

eine Kurve 4. Ordnung in $(\beta; x)$, mit der Auflösung

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2\beta^2}\left\{(\delta\,g + (\pm)\,2\,\nu\,\beta) \pm \sqrt{(\delta\,g + (\pm)\,2\,\nu\,\beta)^2 - 4\,\nu^2\,\beta^2}\right\} \\ \;\;= \dfrac{1}{2\beta^2}\left\{(\delta\,g + (\pm)\,2\,\nu\,\beta) \pm \sqrt{\delta\,g\,(\delta\,g + (\pm)\,4\,\nu\,\beta)}\right\}\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (2').$$

Es sei insbesondere $\nu'' = 0$, die Welle also ungedämpft (siehe a. a. O. [2] § 3). Dann sind alle Konstanten reell.

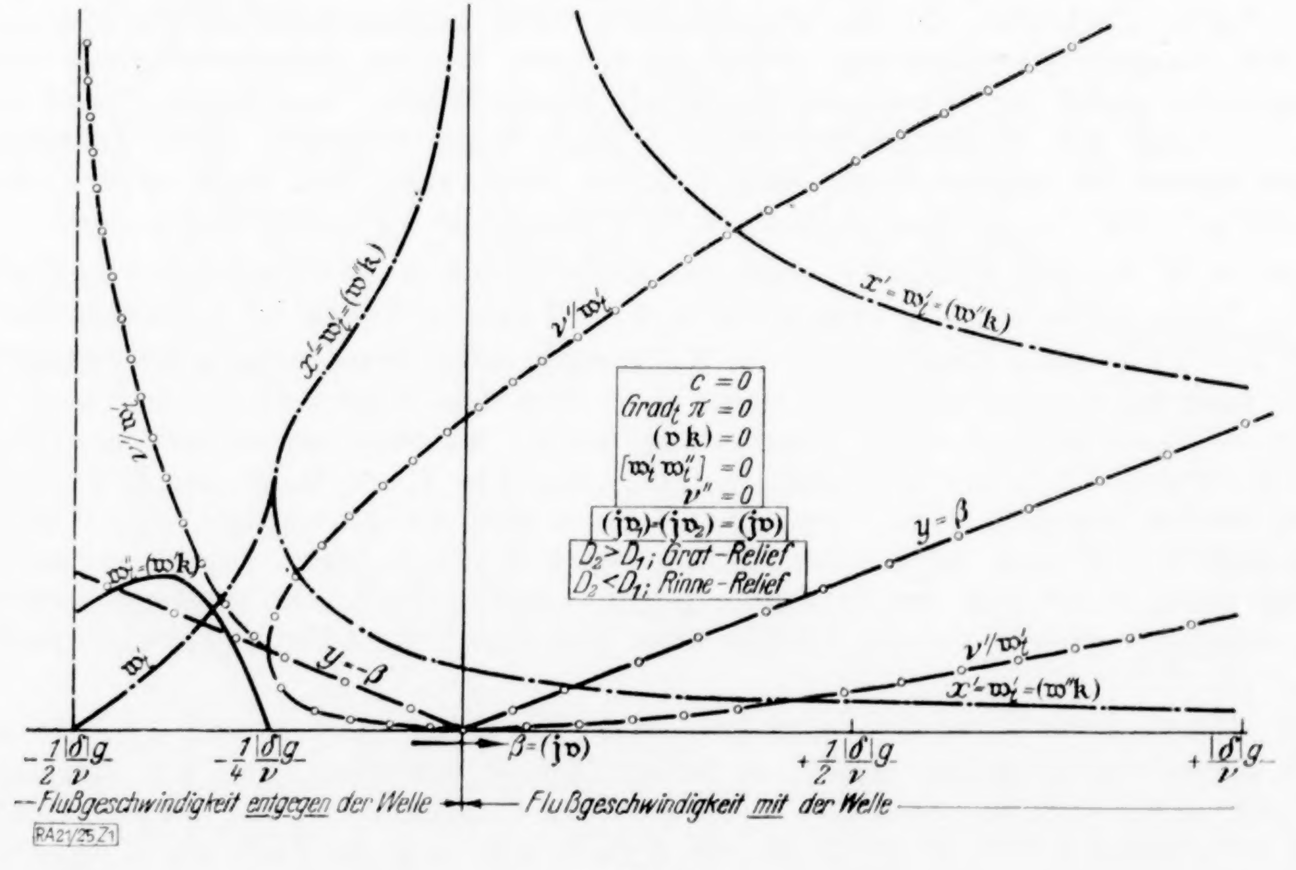


Abb. 1.

[1]) K. Uller: Die geführten Schwere-Wellen an der Grenze zweier fließenden Mittel. Diese Zeitschr., Bd. 7 (1927), S. 129.

α) Einsatz (+): Welle mit Grat-Querrelief (Abb. 1 und 2). Ist $D_2 > D_1$, so ist unterhalb $\beta = -\,^1/_2 \cdot \delta g/\nu$, weil dann keine positive reelle x auftreten, diese Welle unmöglich! Im Gebiete $-\,^1/_2 \cdot \delta g/\nu < \beta < -\,^1/_4 \cdot \delta g/\nu$ ist die Wurzel in (2') imaginär, gibt es also x''-Werte, also Verlöschung $e^{(\mathfrak{w}_t'' \mathfrak{r})}$ längs U in ungedämpfter Welle, mit einem Maximum $2{,}6\ \nu^2/\delta g$ bei $\beta = -\,^1/_3 \cdot \delta g/\nu$.

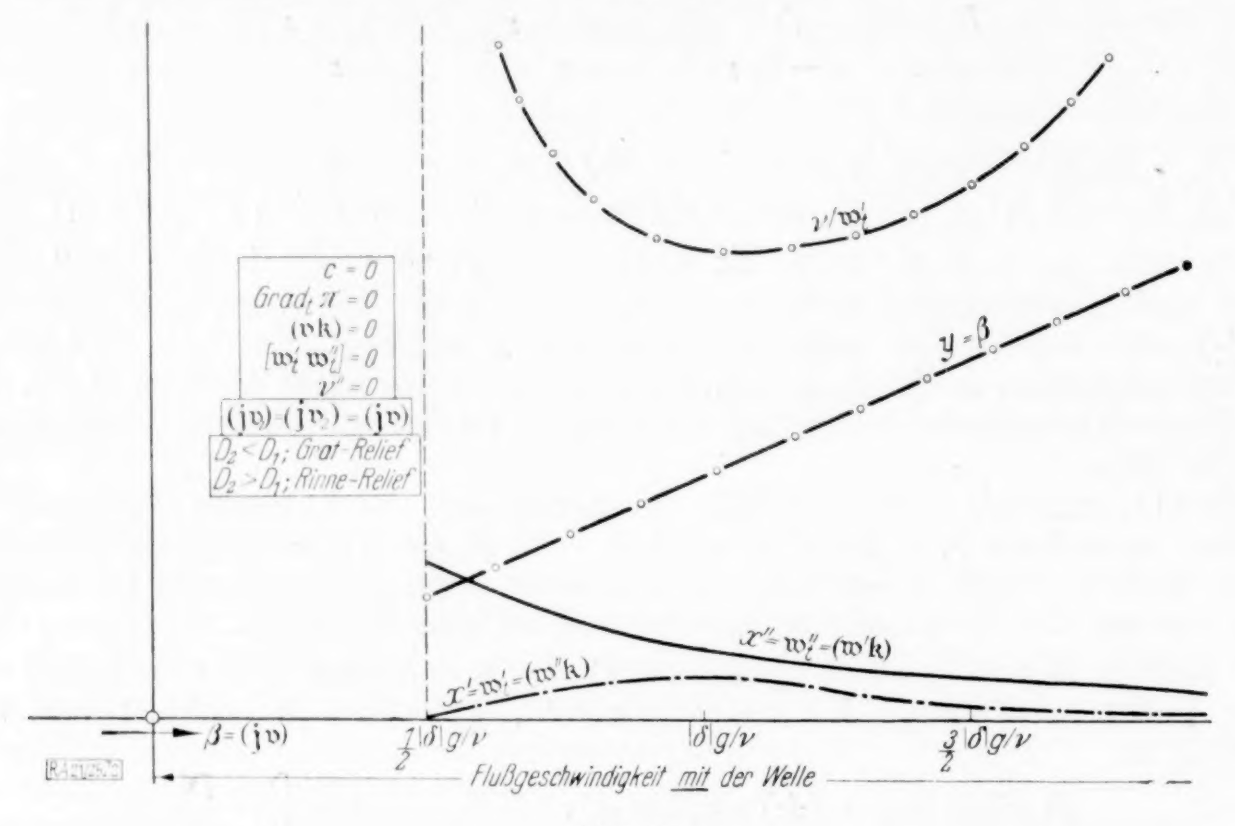


Abb. 2.

In $\beta = -\,^1/_2\, \delta g/\nu$ und $-\,^1/_4\, \delta g/\nu$ finden wir für $x'' = \mathfrak{w}_t''$ die Werte $2\ \nu^2/\delta g$ und 0 sowie für x' die Werte 0 und $4\ \nu^2/\delta g$. Im reellen Gebiet ist x' stets positiv und zweideutig. In $\beta = \pm 0$ ist $x' = \nu^2/\delta g$ und $+\infty$, in $\beta = +\,^1/_2\, \delta g/\nu$ ist $x' = 7{,}46$ bzw. $0{,}54$ mal $\nu^2/\delta g$. Für große β wird $x' \approx \frac{\nu}{\beta}\left\{1 \pm \sqrt{\frac{\delta g}{\nu \beta}}\right\}$, d. h. die Werte fallen dort monoton gegen 0 ab; im Zwischengebiet besteht kein Maximum oder Minimum. — Aus den $x' = \mathfrak{w}_t' = (\mathfrak{w}'' \mathfrak{k})$ ergeben sich auch die Kurven der Wellengeschwindigkeit ν/x'. In $\beta = -\,^1/_4\, \delta g/\nu$ ist $\nu/x' = \,^1/_4\, \delta g/\nu$. Dort also, wo die ungedämpfte Welle beginnt keilförmiges Wellenflächen-System mit Tangentialverlöschung $e^{(\mathfrak{w}_t'' \mathfrak{r})}$ zu zeigen, ist die Geschwindigkeit der Welle entgegengesetzt gleich der Flußgeschwindigkeit beider Mittel. Von diesem Punkt aus nach kleineren β steigt die Wellengeschwindigkeit nach ∞ an, wogegen nach größeren β sie sich verzweigend die beiden Aeste einer Parabel beschreibt. Bei Ruhe ($\beta = 0$) der Mittel ist $\nu/x' = \delta g/\nu$ und 0. In $\beta = +\,^1/_2\, \delta g/\nu$ ist $\nu/x' = 1{,}85\ \delta g/\nu$ und $0{,}134\ \delta g/\nu$.

Ist $D_2 < D_1$, also δ negativ, dann ist nach (2') ein positiver Wert von x', wenn $\beta < +\,^1/_2\, |\delta|\, g/\nu$, unmöglich, somit auch die Welle. Weiter ist deswegen die Wurzel $\sqrt{|\delta|\, g\, (|\delta|\, g - 4\,\nu\,\beta)}$ stets imaginär. Die Welle zeigt also jetzt stets keilförmiges Wellenflächen-System mit Tangentialverlöschung $e^{(\mathfrak{w}_t'' \mathfrak{r})}$. Von dem Wert $2\ \nu^3/|\delta|\, g$ in $\beta = +\,^1/_2\, |\delta|\, g/\nu$ fällt $x'' = \mathfrak{w}_t''$ monoton auf 0 im Unendlichen herab, während x', im ganzen Gebiet einwertig, vom Werte 0 über ein Maximum $^1/_2\, \nu^2/|\delta|\, g$ bei $\beta = |\delta|\, g/\nu$, wo x'' den Wert $0{,}87\ \nu^2/|\delta|\, g$ annimmt, wieder gegen 0 geht. Dementsprechend fällt die einwertige Kurve der Wellengeschwindigkeit ν/x' von ∞ auf den Minimalwert $2\, |\delta|\, g/\nu$, dem doppelten der Flußgeschwindigkeiten, herab, um von da wieder gegen ∞ anzusteigen. Die Wellengeschwindigkeit ist stets erheblich größer als die mit ihr stets gleichgerichtete Flußgeschwindigkeit beider Mittel.

β) Einsatz (—); Welle mit Rinne-Querrelief (Abb. 2 und 1). Da jetzt nur negative Werte von x' gelten sollen, so ist an (2') zu erkennen, daß wir dieselben Gleichungen wie unter α) bekommen, also auch dieselben Kurvenbilder, nur mit dem Unterschied, daß nun umgekehrt im Falle $D_2 > D_1$ die Abb. 2 gilt, und im Falle $D_2 < D_1$ die Abb. 1.

γ) Vergleich mit dem Standwechsel-Verfahren. Im Falle gleicher Flußgeschwindigkeiten sind die Formeln des genannten Verfahrens, wie wir früher gezeigt

haben, wenigstens in sich widerspruchslos. Da nach ihm die Wellengeschwindigkeit $\mathfrak{u} = \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_0$ und die Druckbedingung $\mathfrak{v}_0{}^2 = \delta\, g/\nu \cdot |\mathfrak{u}|$, so ergibt sich für $\mathfrak{u} = f(\mathfrak{v}) = f(\beta)$ eine Parabel. Sie deckt sich für positive δ mit unserem Kurvenbilde 1 der Wellengeschwindigkeit ν'/x', soweit $- {}^1/_4 \cdot |\delta|\, g/\nu < \beta$ ist. Der Teil für kleinere β ist wegen des von uns erwiesenen keilförmigen Wellenflächen-Systems für dies Verfahren natürlich nicht vorhanden, ebenso wenig das Kurvenbild. Es ist diese teilweisige Uebereinstimmung aber andererseits ein Beweis dafür, daß sich kein Fehler in unsere Rechnung eingeschlichen hat.

Kriech-Wellen gibt es nur, falls beide Mittel fast oder ganz ruhen, und zwar für $D_2 > D_1$ als Grat-Welle, für $D_2 < D_1$ als Rinne-Welle.

B. **Beide Flüsse haben entgegengesetzt gleiche Bewegungsgrößen, wie es der Fall ist, wenn keine horizontalen, äußeren Kräfte wirken:** $D_1 \beta_1 + D_2 \beta_2 = 0$. (Abb. 3 — 6)

Dann vereinfacht sich (1') zu

$$a x^2 - b x - (D_1 + D_2)\nu^3 = 0 \text{ mit der Parabel } a = \beta_2 \left\{\nu \frac{D_2}{D_1}(D_1 + D_2)\beta_2 + (\pm)\frac{D_1{}^2 + D_2{}^2}{D_1} g\right\} \quad \text{und der Geraden } b = (D_2 - D_1)\nu^2 \left\{(\pm)\frac{D_1 + D_2}{D_1}\beta_2 - \frac{g}{\nu}\right\} \quad (3)$$

als Hilfskurven. Die Auflösung dieser Kurve 4. Ordnung in $(\beta_2\,; x)$ lautet

$$x = \frac{1}{2a}\left\{b \pm \sqrt{b^2 + 4\,(D_1 + D_2)\,\nu^3 a}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4).$$

Bei ungedämpfter Welle kann x nur im Gebiete negativer a komplex ausfallen. Ferner wird

$$\begin{aligned}(\beta_2\, x)_{\beta_2 = \pm\infty} &= \frac{1}{2}\frac{D_1}{D_2}\frac{\nu'}{\beta_2}\left\{\frac{D_2 - D_1}{D_1}\beta_2 \pm \sqrt{\left(\frac{D_2 - D_1}{D_1}\right)^2 \beta_2{}^2 + 4\frac{D_2}{D_1}\beta_2{}^2}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\frac{D_1}{D_2}\cdot\frac{\nu'}{D_1}\{(D_2 - D_1) \pm (D_2 + D_1)\} = \nu' \text{ bzw. } -\frac{D_1}{D_2}\cdot\nu'\end{aligned} \quad \ldots \quad (5)$$

für beide Einsätze. Die Geschwindigkeitskurven ν'/x' verlaufen also stets beiderseits nach dem Unendlichen.

α) **Einsatz (+); Welle mit Grat-Querrelief.** (Abb. 3 und 4). Wir wollen zunächst das Gebiet aufsuchen, wo $x'' = |\mathfrak{w}_t''|$ verschwindet. Die Reellität von x verlangt

$$\frac{(D_1 + D_2)^4}{D_1{}^2}\beta_2{}^2 + 2\frac{(D_1 + D_2)^3}{D_1}\frac{g}{\nu}\beta_2 + (D_2 - D_1)^2\left(\frac{g}{\nu}\right)^2 \geqq 0 \quad \ldots \quad (6);$$

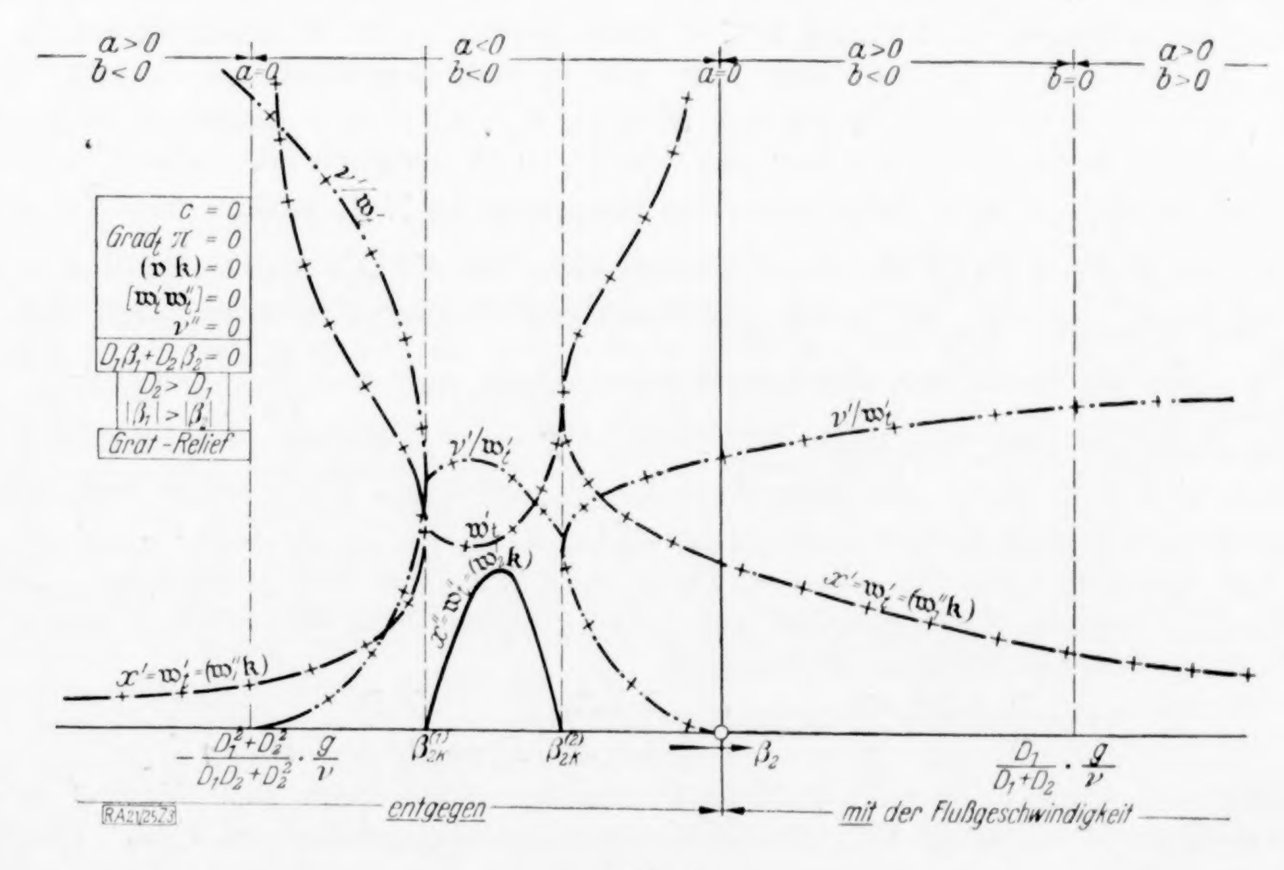


Abb. 3.

β_2 muß also außerhalb der beiden negativen Werte

$$\left.\begin{aligned} &\beta_{2k}^{(1)} \text{ und } \beta_{2k}^{(2)} = -\left\{\frac{\sqrt{D_1} \pm \sqrt{D_2}}{D_1 + D_2} \cdot \sqrt{D_1}\right\}^2 \cdot \frac{g}{\nu} \text{ liegen. Da } \beta_{2k} - (\beta_2)_{a=0} \\ &= \beta_{2k} + \frac{D_1^2 + D_2^2}{D_1 D_2 + D_2^2} \cdot \frac{g}{\nu} = \left\{\frac{\sqrt{D_1^3} \mp \sqrt{D_2^3}}{D_2 (D_1 + D_2)^2}\right\}^2 \cdot \frac{g}{\nu} > 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (7),$$

so liegen beide Grenzwerte stets oberhalb des Wertes $\beta_2 = -\frac{D_1^2 + D_2^2}{D_2 D_1 + D_2^2} \cdot \frac{g}{\nu}$, wo a verschwindet. Die Strecke $\beta_{2k}^{(2)} - \beta_{2k}^{(1)} = 4\,\frac{\sqrt{D_2/D_1}}{1 + D_2/D_1} \cdot \frac{g}{\nu}$ verschwindet für $D_2/D_1 = -\beta_1/\beta_2 = 0$ oder ∞, mit einem Maximum dazwischen für $D_2/D_1 = 1/3$ vom Betrage $3/4\,\sqrt{3} \cdot g/\nu$.

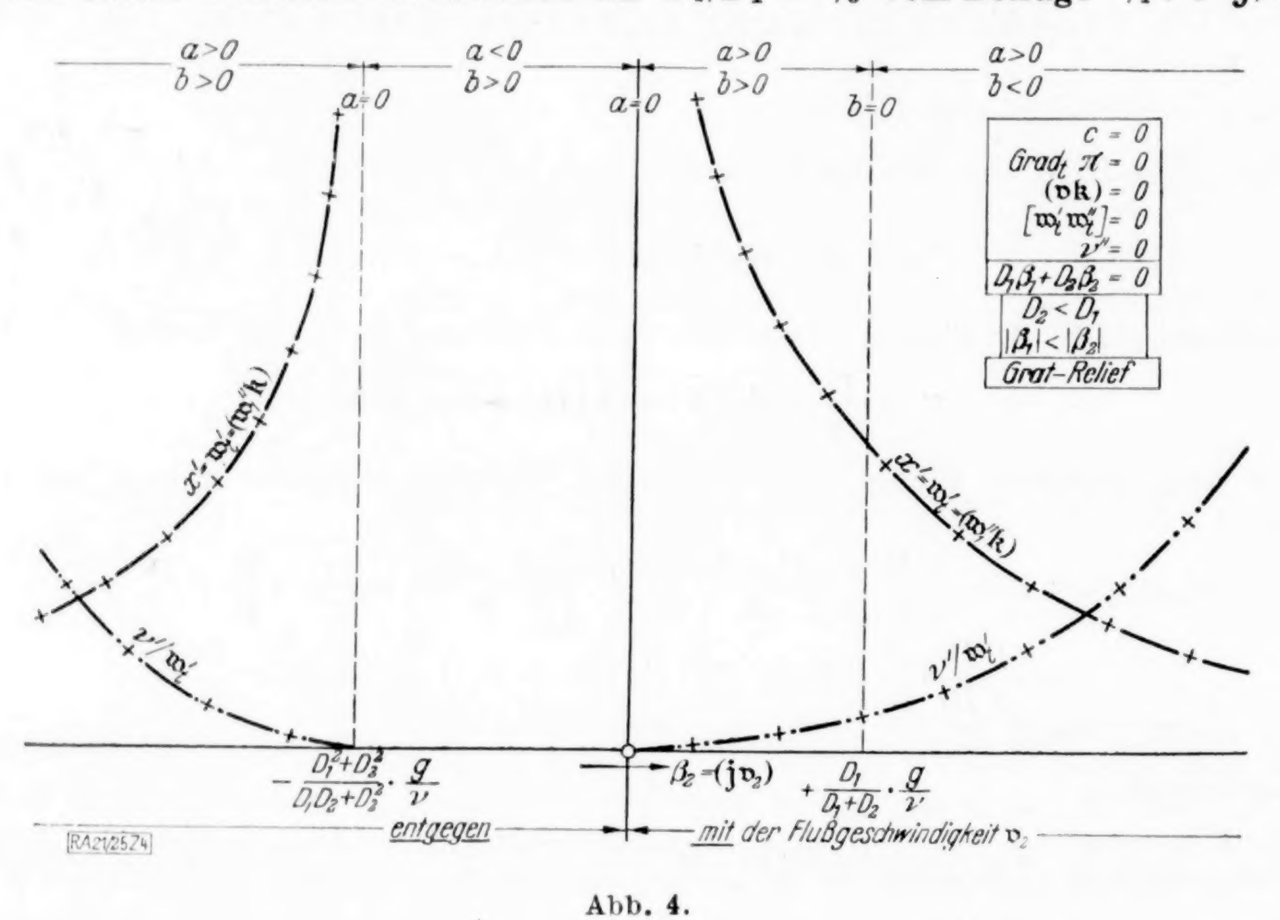


Abb. 4.

Die Positivität von x' verlangt, daß für $a > 0$ nur die positive Wurzel in (4) gelte, gleichgültig ob $b \gtrless 0$ ist. Wenn $a < 0$ und $b > 0$, dann ist ein positives x' unmöglich; wenn hingegen $a < 0$ und $b < 0$, dann gelten beide Wurzelvorzeichen.

Im komplexen Gebiet, das nur auf seiten negativer β_2 liegen kann, ist $x'' = \sqrt{-\{4\,(D_1 + D_2)\,\nu'^3\,a + b^2\}} : 2\,a$ und $x' = b/2\,a$, was positiv ausfallen muß bei negativen Werten von b und a und daher nur für $D_2 > D_1$ möglich ist. Die x''-Kurve steigt von Null ab in $\beta_{2k}^{(1)}$ an und kehrt über ein Maximum zu Null zurück in $\beta_{2k}^{(2)}$. In β_{2k} ist $x' = b/2\,a = -\,2\,(D_1 + D_2)\,\nu'^3/b$; die Kurvenpunkte für die Abszissen $\beta_{2k}^{(1)}$ und $\beta_{2k}^{(2)}$ liegen also im Hinblick auf (3) auf einer gleichseitigen Hyperbel in bezug auf die Gerade $\beta_2 = \frac{D_1}{D_1 + D_2} \cdot \frac{g}{\nu'}$, wo $b = 0$ ist; die betreffenden Werte sind $x = \frac{D_2 + D_1}{D_2 - D_1} \cdot 4 \left\{1 \pm \frac{\sqrt{D_1 D_2}}{D_1 + D_2}\right\} \frac{\nu'^2}{g}$; sie können oberhalb oder unterhalb der Geraden $y = -\beta_2$ liegen, je nach dem Verhältnis D_2/D_1. Die x'-Kurve steigt von dem Wert in $\beta_{2k}^{(1)}$ durch ein Minimum zu dem Wert in $\beta_{2k}^{(2)}$ an. — In $(a = 0)$, also $\beta_2 = 0$ und $\beta_2 = -(D_1^2 + D_2^2) : (D_1 D_2 + D_2^2) \cdot g/\nu'$ ist, falls x endlich, im Hinblick auf (3) $x' = -(D_1 + D_2)\,\nu'^3 : b$, was $b < 0$ verlangt. Auch hier liegen die zugehörigen Kurvenpunkte auf einer gleichseitigen Hyperbel in bezug auf die Gerade $(b = 0)$, die betreffenden Werte sind

$$x' = \frac{D_2 + D_1}{D_2 - D_1} \cdot \frac{\nu'^2}{g} \text{ und } x' = \frac{D_2 + D_1}{D_2 - D_1} \cdot \frac{D_1 D_2}{D_1^2 + D_2^2 + D_1 D_2} \cdot \frac{\nu'^2}{g}.$$

Außerdem gibt es aber in beiden Abszissenpunkten noch den Wert $x' = +\infty$. — Aus den x'-Kurven ergeben sich die Wellengeschwindigkeitskurven ν'/x'. Dabei liegen für die eben genannten vier ausgezeichneten β-Werte die zugehörigen Geschwindigkeits-

punkte auf zwei durch ($b = 0$) laufenden Geraden, von denen die eine doppelt so große Ordinaten hat, wie die andere. Denn in β_{2k} ist $v'/x' = b/2\,v^2 (D_1 + D_2)$ und in ($a = 0$) ist $v'/x' = b/v^2 (D_1 + D_2)$, wobei für die Ordinate b gesetzt werden kann $b = \alpha\, b'$, wenn b' die zugehörige, von ($b = 0$) an gerechnete Abszisse bezeichnet und α eine Konstante.

Bei $D_2 > D_1$ (Abb. 3) ist die Zweimittelwelle für jedes $\beta_2 = (\mathfrak{j}\,\mathfrak{v}_2)$ möglich. Auch Kriech-Wellen können auftreten. Tangential-Verlöschung und somit keilförmige Wellenflächen-Systeme in ungedämpfter Welle gibt es nur in einem gewissen Gebiet, wo die Welle gegen den unteren Fluß gerichtet ist.

Wenn $D_2 < D_1$ (Abb. 4), ändert bloß b sein Vorzeichen. Als Folge hiervon gibt es keine Zweimittel-Welle mit Tangential-Verlöschung, es gibt sogar ein Gebiet — es liegt zwischen den beiden Geraden ($a = 0$) auf seiten negativer β_2 — wo überhaupt keine solche Welle möglich ist. Jetzt treten nur einwertige x' auf und in $\beta_2 = 0$ sowie $\beta_2 = -(D_1^2 + D_2^2) : (D_1 D_2 + D_2^2) \cdot g/v'$ ist $x' = +\infty$; in dieser Nähe gibt es wieder Kriech-Wellen.

β) Einsatz (—); Welle mit Rinne-Querrelief. (Abb. 5 und 6). Jetzt schneidet die Gerade (b) die Abszissenachse auf der negativen Seite in $\beta_2 = -D_1/(D_1 + D_2) \cdot g/v$, schneiden die beiden Senkrechten ($a = 0$) in $\beta_2 = 0$ und in $\beta_2 = +(D_1^2 + D_2^2) : (D_1 D_2 + D_2^2) \cdot g/v$. Die Lage der Gerade ($b$) bestimmt das Vorzeichen von $D_2 - D_1$.

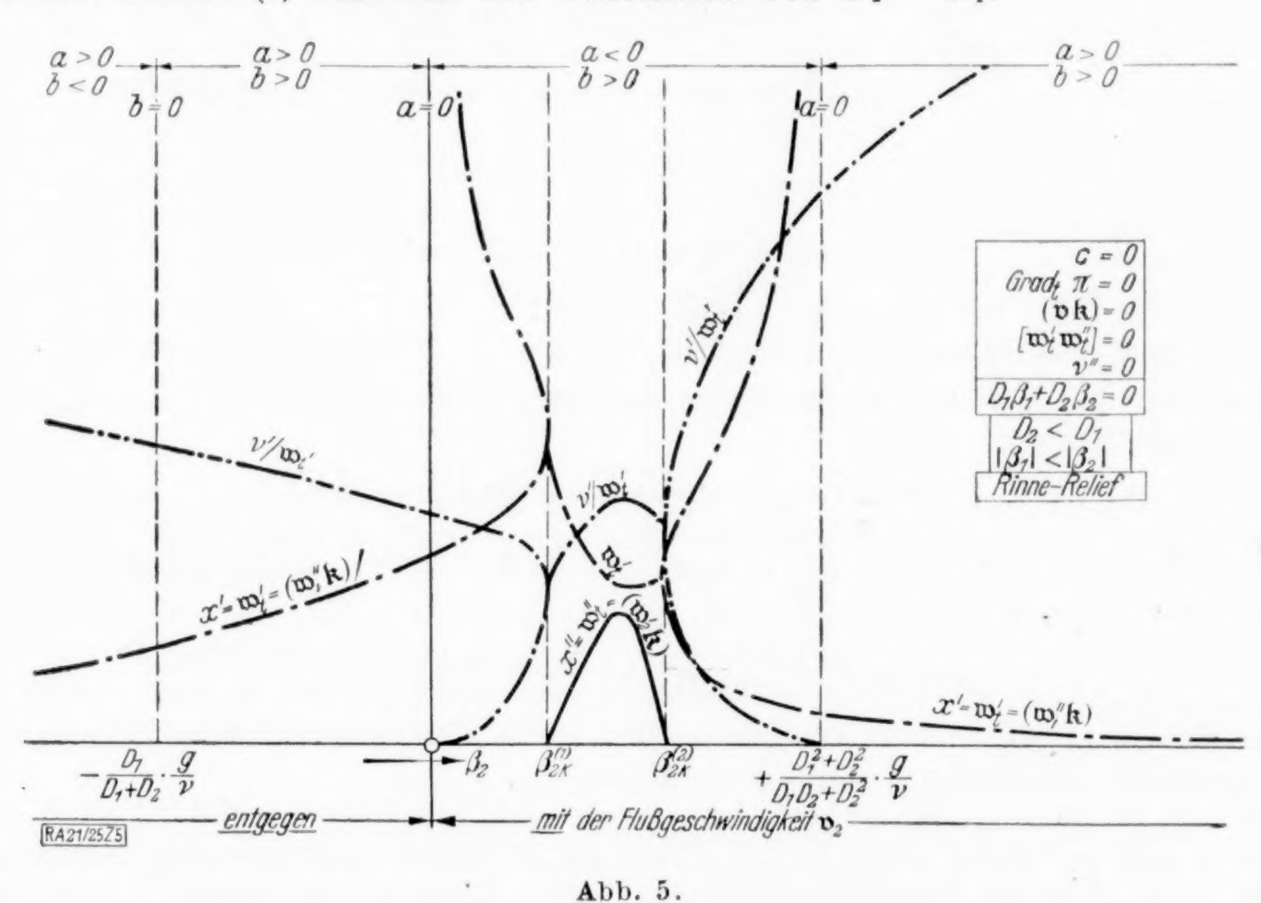


Abb. 5.

Wenn $D_2 > D_1$ (Abb. 5), verlangt die Negativität von x', daß für $a > 0$ nur die negative Wurzel in (4) gelte, gleichgültig ob $b \gtrless 0$. Wenn $a < 0$, wobei $b < 0$, und x' reell, ist kein negativer Wert von x' möglich; dann ist also auch keine Welle möglich. Wenn $a < 0$ und x komplex, ist $x' = b/2\,a$, was aber ebenfalls unmöglich ist. Hieraus und aus weiteren Einzelheiten geht hervor, daß das Kurvenbild für x' und v'/x' spiegelbildähnlich zu dem für die Grat-Welle unter α) für $D_2 < D_1$ ist, siehe Abb. 4, indem β_2 mit $-\beta_2$ vertauscht erscheint. Das beschränkte Gebiet der Wellenlosigkeit liegt jetzt auf der positiven Seite von β_2.

Wenn $D_2 < D_1$ (Abb. 6), verlangt die Negativität von x', daß für $a > 0$ nur die negative Wurzel in (4) gelte, gleichgültig ob $b \gtrless 0$. Wenn $a < 0$, wobei $b > 0$, sind für reelle x beide Wurzeln gültig, wird für komplexe x-Werte $x' = b/2\,a < 0$ verlangt, was möglich ist. Es gibt also innerhalb der beiden Senkrechten ($a = 0$) zwei β_{2k}-Werte. Das Kurvenbild für x' und v'/x' erweist sich als spiegelbildähnlich zu dem für die Grat-Welle unter α) für $D_2 > D_1$, siehe Abb. 3, indem β_2 mit $-\beta_2$ vertauscht erscheint.

C. Das erste Mittel, das obere ruhe oder bewege sich quer zur Welle, also $\beta_1 = 0$, Abb. 7 bis 10. Dann vereinfacht sich Gl. (1) ebenfalls zu der quadratischen Gleichung

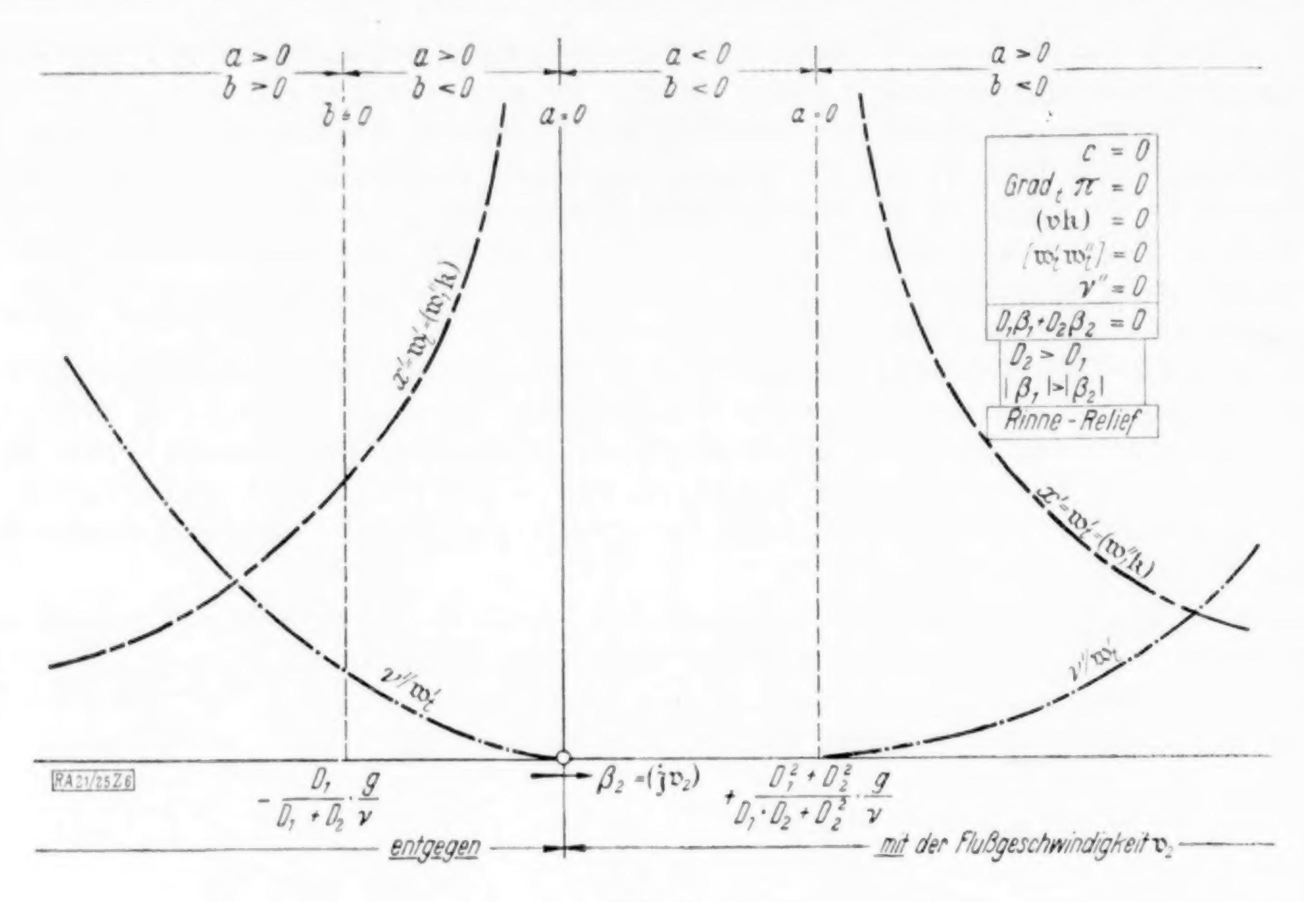


Abb. 6.

$$\left.\begin{array}{l} a\,x^2 - (\pm)\,b\,x + (D_1 + D_2)\,\nu^3 = 0 \\ \text{mit der Parabel } a = \beta_2\,\{\nu\,D_2\,\beta_2 - (\pm)\,D_1\,g\} \\ \text{und der Geraden } b = \nu^2\,\{(2\,D_2 + D_1)\,\beta_2 + (\pm)\,(D_2 - D_1)\,g/\nu\} \end{array}\right\} \quad . \; . \; (8)$$

als Hilfskurven, die wir uns eingezeichnet denken. Die Auflösung dieser Kurve 4. Ordnung in $(\beta_2;\,x)$ lautet

$$x = \frac{1}{2\,a}\left\{(\pm)\,b \pm \sqrt{b^2 - 4\,(D_1 + D_2)\,\nu^3\,a}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9).$$

Bei sehr großen Werten von β_2 kann man in a und b je das zweite Glied vernachlässigen, so daß (9) die Form annimmt

$$(\beta_2\,x)_{\beta_2=\infty} = (\pm)\,\frac{\nu}{2\,D_2}\,\{(2\,D_2 + D_1) \pm (\pm)\,D_1\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (10).$$

Für beide Einsätze $(+)$ und $(-)$ fallen mithin beide Kurvenäste hyperbolisch gegen Null hin ab, merklich unabhängig von der Schwere (g).

Ist die Welle ungedämpft $(\nu'' = 0)$, dann sind die Beiwerte in (8) reell, dann sind komplexe x nur in einem Gebiete möglich, wo a positiv ausfällt. Die Grenzen des Gebietes, in dem $x'' = \mathfrak{w}_t''$ verschwindet, also keine Verlöschung längs U statt hat, wollen wir zunächst untersuchen. Die reellen Gebiete von x sind gekennzeichnet durch

$$D_1\,\nu^2\,\beta_2^{\,2} + (\pm)\,2\,(D_1^{\,2} + 2\,D_2^{\,2} + D_1\,D_2)\,g\,\nu\,\beta_2 + (D_2 - D_1)^2\,g^2 \geqq 0.$$

Wenn $D_1 = 0$, muß $\beta_2 \geqq -(\pm)\,g/4\,\nu$ sein; zu dem Werte $\beta_2 = -g/4\,\nu$ gehört $x' = 4\,\nu^2/g$, zu $\beta_2 = +g/4\,\nu$ gibt es keine zulässige Wurzel. Wenn $D_1 \neq 0$, dann muß β_2 außerhalb der beiden Werte $\beta_{2k}^{(1)}$ und $\beta_{2k}^{(2)} =$

$$-(\pm)\,\frac{g}{\nu}\left\{\left[1 + \frac{D_2}{D_1} + 2\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2\right] \pm 2\sqrt{\frac{D_2}{D_1} + \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 + \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3 + \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4}\right\} \quad (11)$$

liegen. Da das erste Glied in der geschweiften Klammer stets größer ist als das zweite, so sind bei positivem Einsatz $\beta_{2k}^{(1)}$ und $\beta_{2k}^{(2)}$ stets negativ, bei negativem Einsatz stets ebenso groß positiv. Jeder der beiden Werte, die nur von dem gegebenen Verhältnis D_2/D_1 abhängen, ist aber nur dann Abszisse von $x'' = 0$, als Grenze eines wirklich vorhandenen Verlöschungsgebietes, wenn gemäß (9) neben $a > 0$ noch $b > 0$ ausfällt, welche Bedingung von dem vorgeschriebenen Vorzeichen von x' herkommt. So kann es vorkommen, daß nur ein oder gar kein Wert (11) in ein Gebiet $(a > 0;\, b > 0)$ zu liegen kommt. Innerhalb der beiden möglichen Werte ist $\mathfrak{w}_t'' \neq 0$, zeigen also selbst ungedämpfte Zweimittelwellen die Tangentialverlöschung $e^{(\mathfrak{w}_t''\,\mathfrak{r})}$ längs U, indem die Wellenflächensysteme keilförmig sind. Ferner ist in diesem Gebiete x' einwertig $= (\pm)\,b/2\,a$.

Die mögliche Strecke $\beta_{2k}^{(2)} - \beta_{2k}^{(1)} = (\pm)\frac{g}{\nu}\,4\sqrt{\frac{D_2}{D_1}\left\{\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4 - 1\right\} : \left\{\frac{D_2}{D_1} - 1\right\}}$ hat für $D_2/D_1 = 0$ die Länge 0, für $D_2/D_1 = \infty$ die Länge $(\pm)\,\infty$. — Schließlich wollen wir stets beachten, daß stets $D_1 : D_2 > -(D_2 - D_1) : (2\,D_2 + D_1)$ ist.

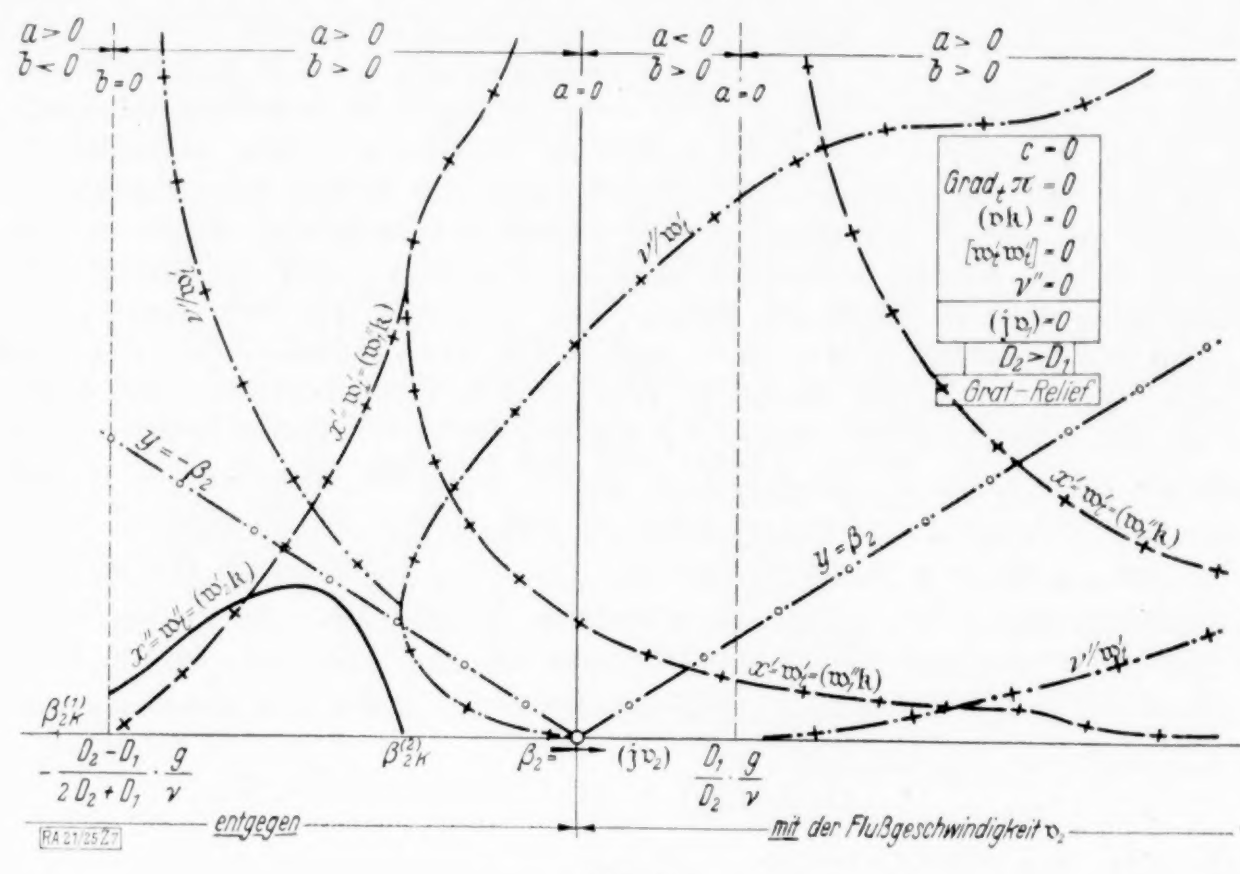


Abb. 7.

α) [**Einsatz (+); Welle mit Grat-Querrelief**, Abb. 7 und 8. Die Positivität von x' bei oberen Vorzeichen in (8) verlangt, daß bei reellen x für $a > 0$ beide Vorzeichen in (9) gelten, solange $b > 0$. Eine Grat-Welle ist also unmöglich, wenn $a > 0$; $b < 0$, wenn also für $D_2 < D_1$ einerseits β_2 negativ ist, wenn für $D_2 > D_1$ anderseits β_2 negativ und kleiner als $-(D_2 - D_1) : (2\,D_2 + D_1) \cdot g/\nu$, für welchen Wert $b = 0$ ist! Ferner verlangt die Positivität reeller x, daß für $a < 0$ nur das untere Vorzeichen der Wurzel in (9) gelte, welches Vorzeichen auch b habe. — Wenn $b = 0$,

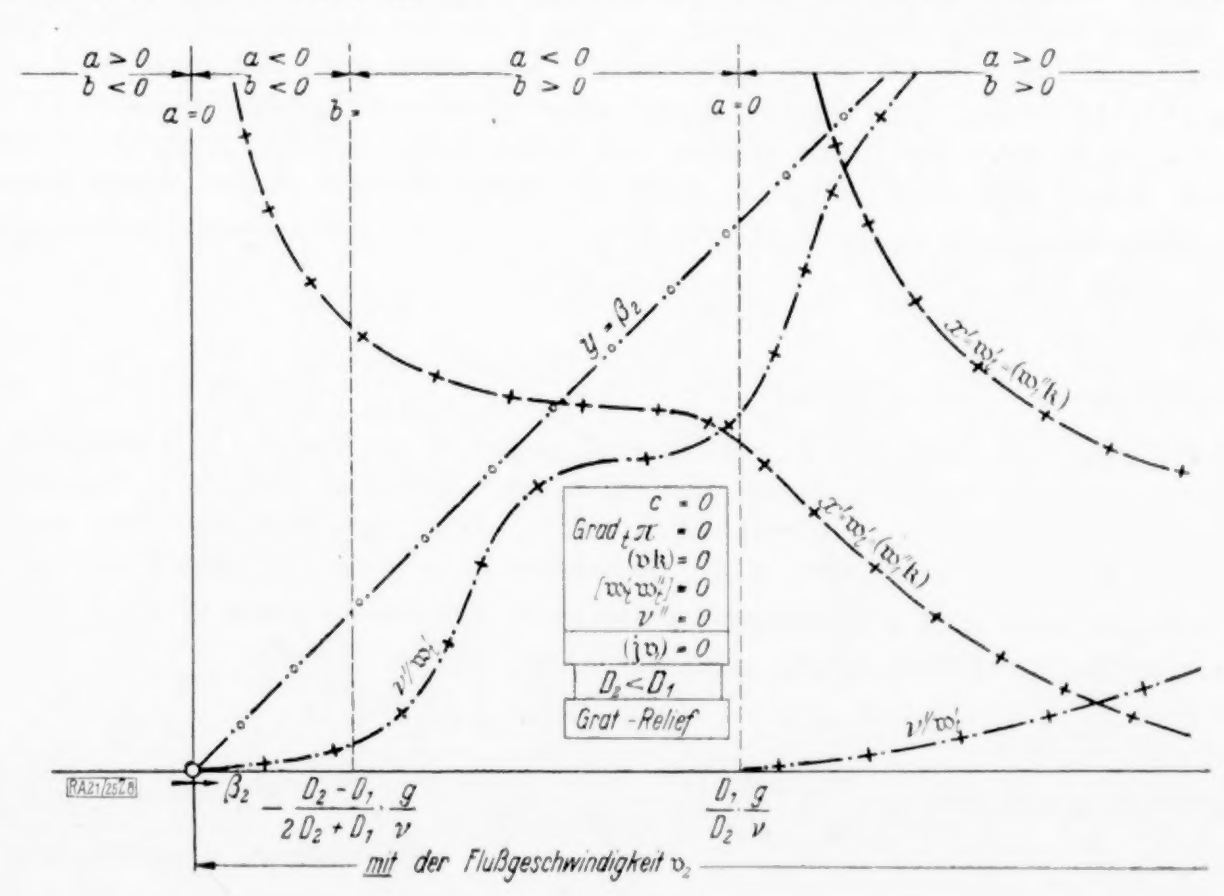


Abb. 8.

also $\beta_2 = -(D_2 - D_1):(2\,D_2 + D_1)\cdot g/\nu$, finden wir für $D_2 > D_1$, daß β_2 negativ und deshalb auch $\nu\,D_2\,\beta_2 - D_1\,g$ negativ ist; folglich gehört zu $(b = 0)$. weil dann a positiv ist, ein Wert x, der im komplexen Gebiet liegt, mit $x' = 0$; $x'' = \sqrt{(D_1 + D_2)\,\nu^3 : a}$. Ist hingegen $D_2 < D_1$, dann ist bei verschwindendem b zwar wieder $\nu\,D_2\,\beta_2 - D_1\,g$ negativ, aber jetzt β_2 positiv, so daß a negativ und wegen $b = 0$ jetzt x reell und endlich und zwar $x' = \sqrt{-(D_1 + D_2)\,\nu^3/a}$ ausfällt. — Wenn $\nu\,D_2\,\beta_2 - D_1\,g = +0 = a$, ist $x = +\infty$ und nach (8) auch $= (D_1 + D_2)\,\nu^3 : b$; wenn dagegen $\nu\,D_2\,\beta_2 - D_1\,g = -0 = a$, dann ist x nur gleich $(D_1 + D_2)\,\nu^3 : b$. Wenn $\beta_2 = +0$, was $a = -0$ macht, hat man nach (8), falls $D_2 > D_1$ ist, $x = (D_1 + D_2)\,\nu^3 : b = (D_2 + D_1):(D_2 - D_1)\cdot \nu^2/g$, welcher Wert immer größer ist als der mit der Abszisse $\beta_2 = D_1/D_2 \cdot g/\nu$; die beiden Kurvenpunkte in $(a = 0)$ liegen nämlich auf einer gleichseitigen Hyperbel in bezug auf die Senkrechte $(b = 0)$. Ist dagegen $D_2 < D_1$, so daß b negativ, dann ist $x = +\infty$, weil im Zähler von (9) etwas negativ Endliches stehen bleibt. — Wenn $\beta_2 = -0$, was $a = +0$ macht, hat man für $D_2 > D_1$, also für positives b, $x = +\infty$ und $= (D_2 + D_1):(D_2 - D_1)\cdot \nu^2/g$, während für $D_2 < D_1$, also negatives b, ein positiver Wert von x nicht besteht. — Wenn $D_1/D_2 \cdot g/\nu < \beta_2 < +\infty$, ist a positiv und ebenso b; dann gibt es für jeden Wert von D_2/D_1 zwei Zweige, die für sehr große β_2 hyperbolisch gegen Null hin abfallen. — In $\beta_{2k}^{(1)}$ und $\beta_{2k}^{(2)}$ ist $x = b/2\,a = 2\,(D_1 + D_2)\,\nu^3 : b$; man erkennt, daß wegen der verlangten Positivität von x' für $D_2 > D_1$ der Wert x für $\beta_{2k}^{(1)}$ und für $D_2 < D_1$ die Werte x für $\beta_{2k}^{(1)}$ und $\beta_{2k}^{(2)}$ unmöglich ausfallen, indem bei positivem a dann b negativ ist. Im Falle $D_2 > D_1$ liegen die Endpunkte der Ordinaten zu $(\beta_2 = 0)$ und zu $(\beta_2 = D_1/D_2 \cdot g/\nu)$ sowie der der halben Ordinate zu $\beta_{2k}^{(2)}$ auf einer gleichseitigen Hyperbel in bezug auf die Senkrechte $(b = 0)$.

Wir bilden aus (9) den Anstieg

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\,x}{d\,\beta_2} &= -\frac{(2\,\nu\,D_2\,\beta_2 - D_1\,g)\,x^2 - (2\,D_2 + D_1)\,\nu^2\,x}{2\,a\,x - b}\\ &= -\frac{x}{\beta_2}\,\frac{\nu\,D_2\,\beta_2^2\,x^2 + (D_2 - D_1)\,\nu\,g\,x - (D_1 + D_2)\,\nu^3}{\beta_2\,(\nu\,D_2\,\beta_2 - D_1\,g)\,x^2 - (D_1 + D_2)\,\nu^3}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

und beachten, daß $2\,a\,x' - b = \pm\sqrt{b^2 - 4\,(D_1 + D_2)\,\nu^3\,a}$, $(\beta_2\,x)_{\beta_2 = 0} = -\frac{\nu}{2\,D_1}\Big\{(D_2 - D_1) \pm \sqrt{(D_2 - D_1)^2}\Big\}$, worin für $\beta_2 = -0$, also $a = +0$, bei $D_2 > D_1$ beide Wurzelvorzeichen gelten, und für $\beta_2 = +0$, also $a = -0$, nur das untere. Der Anstieg ist bei gegebenem β_2 nur dort zweiwertig, wo x zweiwertig ist. Wenn — falls $\beta_2 \neq 0$ — $x = +\infty$, ist der Anstieg $= -\infty$, falls $\nu\,D_2\,\beta_2 - D_1\,g = +0$ oder $\beta_2 = +0$; der Anstieg ist $= +\infty$, wenn $\beta_2 = -0$ ist. — Da $2\,a\,x - b$ nach (9) für positive x' nur in $\beta_{2k}^{(2)}$ verschwindet, dort aber der Zähler von (12) endlich bleibt, so ist dort der Anstieg unendlich groß. — Der Anstieg verschwindet, wenn x verschwindet, was nach (11) für $\beta_2 = +\infty$ eintritt, und wenn $x = \nu^2(2\,D_2 + D_1):(2\,\nu\,D_2\,\beta_2 - D_1\,g)$ oder gleichwertig damit $(D_2 - D_1)\,\nu\,g\,x = (D_1 + D_2)\,\nu^3 - \nu\,D_2\,\beta_2^2\,x^2$. Da hierin rechts das erste Glied positiv und das zweite negativ, so existiert stets nur eine einzige positive reelle Wurzel x und diese muß nach dem vorangehenden Ausdruck stets oberhalb $\beta_2 = {}^1/_2 \cdot D_1/D_2 \cdot g/\nu$ liegen. Je nachdem $D_2 \gtrless D_1$ muß $x \lesseqgtr \frac{\nu}{\beta_2}\sqrt{\frac{D_1 + D_2}{D_2}}$ sein

Im möglichen komplexen Gebiet $\left[-\frac{D_2 - D_1}{2\,D_2 + D_1}\cdot\frac{g}{\nu} \leqq \beta_2 \leqq \beta_{2k}^{(2)}\right]$, welches nur für $D_2 > D_1$ existiert, weil für $D_2 < D_1$ und negative β_2 [siehe (11)] einerseits a positiv, andererseits b negativ ausfällt, ist in ungedämpfter Welle $x' = b/2\,a$. Beachten wir, daß in diesem Gebiet b vom Werte null ab linear ansteigt, gleichzeitig aber a mit positiven Werten parabolisch abnimmt, daß $d\,x'/d\,\beta_2$ weder null noch unendlich ist, so ergibt sich, daß die x'-Kurve von null an monoton ansteigt und unter spitzem Winkel in $\beta_{2k}^{(2)}$ auf den vorhin beschriebenen Zweig stößt. Ferner ist in diesem Gebiete

$$x'' = \pm\sqrt{\{4\,(D_1 + D_2)\,\nu^3\,a - b^2\} : 4\,a^2}.$$

Von dem Grenzwert $\pm\frac{\nu^3}{g}\sqrt{\frac{D_2 + D_1}{D_2 - D_1}\cdot\frac{4\,D_2^2 + 4\,D_1\,D_2 + D_1^2}{D_2^2 + D_1\,D_2 + D_1^2}}$ in $\beta_2 = -\frac{D_2 - D_1}{2\,D_2 - D_1}\cdot\frac{g}{\nu}$ (entsprechend $b = 0$), steigt die positive x'-Kurve, wie eine nähere Untersuchung lehrt, zu einem Maximum an und fällt dann auf den Grenzwert null herab in $\beta_{2k}^{(2)}$.

Mit der x'-Kurve ist zugleich auch die Kurve der Wellengeschwindigkeit $\nu'/x' = \nu'/|\mathfrak{w}_t'|$ gegeben. Für große β_2 insbesondere ist nach (10) der Anstieg $\frac{d\,\nu'/x'}{d\,\beta_2} = -\frac{\nu'}{x'^2}\cdot\frac{d\,x'}{d\,\beta_2} \cong \frac{\nu'}{(\beta_2\,x')_{\beta_2=\infty}}$. Für große positive β_2 hat also die untere Geschwindigkeitskurve den Richtungswert $D_2 : (D_1 + D_2) < 1$ und die obere Geschwindigkeitskurve den Richtungswert 1. — In $(\beta_2 = 0)$ ist der Anstieg $\mp D_1 : |D_2 - D_1|$ für $D_2 \gtrless D_1$ und in $(\beta_2 = D_1/D_2 \cdot g/\nu)$ gleich $\nu\, D_1\, g/b$. — Entsprechend der Erörterung unter B liegen die beiden Kurvenpunkte für $(a = 0)$ — siehe die Abbildung — auf einer Geraden, die durch den Fußpunkt der Senkrechten $(b = 0)$ läuft, während der Kurvenpunkt für $\beta_{2k}^{(2)}$ auf einer ebensolchen Geraden liegt, jedoch mit halb so großen Ordinaten. — Es interessiert noch, in welchen Punkten der Geschwindigkeitskurve die Wellengeschwindigkeit gleich ist dem Betrage von $\beta_2 = (\mathrm{j}\,\mathfrak{v}_2)$. Setzen wir in (9) $\beta_2\, x' = \nu'$, so kommt $\beta_2 = +\infty = \nu'/x'$ für den oberen Kurvenzweig. Setzen wir in (9) dagegen für negative β_2 ein $\beta_2\, x' = -\nu'$, so finden wir $\beta_2 = -\frac{D_2 - 2\,D_1}{2\,(2\,D_2 + D_1)}\cdot\frac{g}{\nu} = -\frac{\nu'}{x'}$. Für $D_2 < D_1$ gibt es nach Abb. 8 keinen Schnittpunkt; für $D_2 > D_1$ schneidet die Gerade $y = -\beta_2$ die Wellengeschwindigkeitskurve unterhalb ihres Verzweigungspunktes, denn der obengenannte Wert für β_2 ist einwertig; für $D_1 < D_2 < 2\,D_1$ existiert ein Schnittpunkt nicht.

Im Falle $D_2 > D_1$ ist außer der Unmöglichkeit dieser Welle von einem gewissen Gegenlauf ab, sowie dem Auftreten einer Tangential-Verlöschung $e^{(\mathfrak{w}_t''\,\mathfrak{r})}$ im möglichen Gegenlauf-Gebiet noch zu nennen, daß für zwei verschiedene β_2, nämlich -0 und $+D_1/D^2\cdot g/\nu$ Kriech-Wellen möglich sind. Im Falle $D_2 < D_1$ dagegen ist diese Welle nur bei Mitlauf möglich und gibt es keine Tangential-Verlöschung. Kriech-Wellen gibt es aber auch jetzt für die oben genannten beiden Flußgeschwindigkeiten. In der Welle mit Grat-Querprofil ist, wenn $D_2 < D_1$ die Geschwindigkeit stets kleiner als die des gleichgerichteten Flusses; wenn hingegen $D_1 < D_2 < 2\,D_1$, ist die Wellen-Geschwindigkeit, falls sie gegen den Fluß gerichtet ist, stets größer als die Flußgeschwindigkeit.

β) Einsatz (—); Welle mit Rinne-Querrelief (Abb. 9 und 10). Wir zeichnen zuerst wieder die Gebiete ein, in denen die a und b positiv oder negativ sind. Die Negativität reeller x bei unterem Vorzeichen in (8) verlangt, daß für $a > 0$ beide Wurzelvorzeichen in (9) gelten, solange $b > 0$. Ferner daß für $a < 0$ nur das obere Vorzeichen der Wurzel gelten kann, welches Vorzeichen auch b habe. Eine Welle mit Rinne-Querprofil ist mithin unmöglich, wenn $a > 0$; $b < 0$, wenn also für $D_2 < D_1$ einerseits $-\infty < \beta_2 < -D_1/D_2\cdot g/\nu$, wenn für $D_2 > D_1$ anderseits $-\infty < \beta_2 < -D_1/D_2\cdot g/\nu$, aber auch wenn $0 < \beta_2 < (D_2 - D_1) : (2\,D_2 + D_1)\cdot g/\nu$ ist!

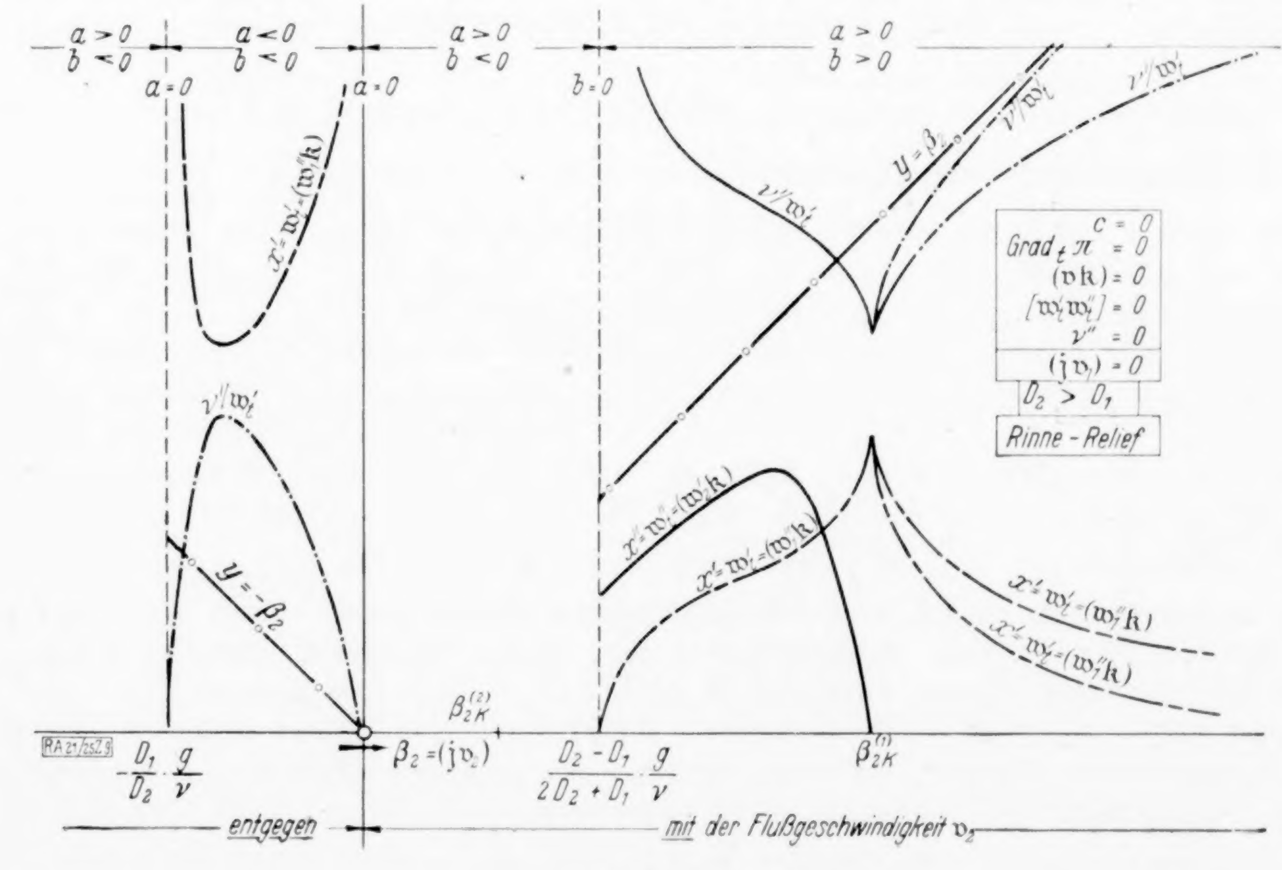


Abb. 9.

Ferner verlangt die Negativität reeller x, daß für $a < 0$ nur das obere Vorzeichen der Wurzel in (9) gelte, welches Vorzeichen b auch habe. — Wenn $b = 0$, also $\beta_2 = (D_2 - D_1) : (2 D_2 + D_1) \cdot g/\nu$, sehen wir, daß für $D_2 > D_1$ sowohl β_2 als auch $\nu D_2 \beta_2 + D_1 g$ positiv ist. Da somit dann a positiv, gehört nach (9) zu der Abszisse $(b = 0)$ ein x, das im komplexen Gebiet liegt, nämlich $x' = 0$; $x'' = \sqrt{(D_1 + D_2)\,\nu^3 : a}$. Ist dagegen $D_2 < D_1$, dann ist für $b = 0$ zwar wieder $\nu D_2 \beta_2 + D_1 g$ positiv, aber nun β_2 negativ, so daß a negativ und jetzt x reell, nämlich $x = -\sqrt{-(D_1 + D_2)\,\nu^3 : a}$ wird. — Wenn $\beta_2 = +0$, dann gibt es für $D_2 > D_1$ keine zulässige Wurzel; für $D_2 < D_1$ hingegen ist $b = -(D_2 - D_1)\,\nu g$ positiv, so daß beide Wurzeln gelten, nämlich, da $a = +0$ ist, $x = -\infty$ und $x = -(D_1 + D_2)\,\nu^3 : b = (D_2 + D_1) : (D_2 - D_1) \cdot \nu^2/g$ in Hinblick auf (8). Wenn $\beta_2 = -0$, gibt es nur den Wert $x = -\infty$ falls $D_2 > D_1$; und den schon genannten Wert $x = -(D_1 + D_2)\,\nu^3 : b = (D_2 + D_1) : (D_2 - D_1) \cdot \nu^2/g$, falls $D_2 < D_1$. — Wenn $\beta_2 = -D_1/D_2 \cdot g/\nu$ und $a = -0$, gibt es nur den Wert $x = -\infty$. In β_{2k} ist $x' = -b/2a = -2(D_1 + D_2)\,\nu^3 : b$. Im Falle $D_2 < D_1$ liegen die Kurvenpunkte von $\beta_{2k}^{(2)}$ und $\beta_{2k}^{(1)}$ sowie der Endpunkt der doppelten Ordinate zu $(\beta_2 = 0)$ auf einer gleichseitigen Hyperbel in bezug auf die Senkrechte $(b = 0)$. — Für große positive β_2 haben wir zwei Zweige, die nach (10) hyperbolisch gegen null hin abfallen.

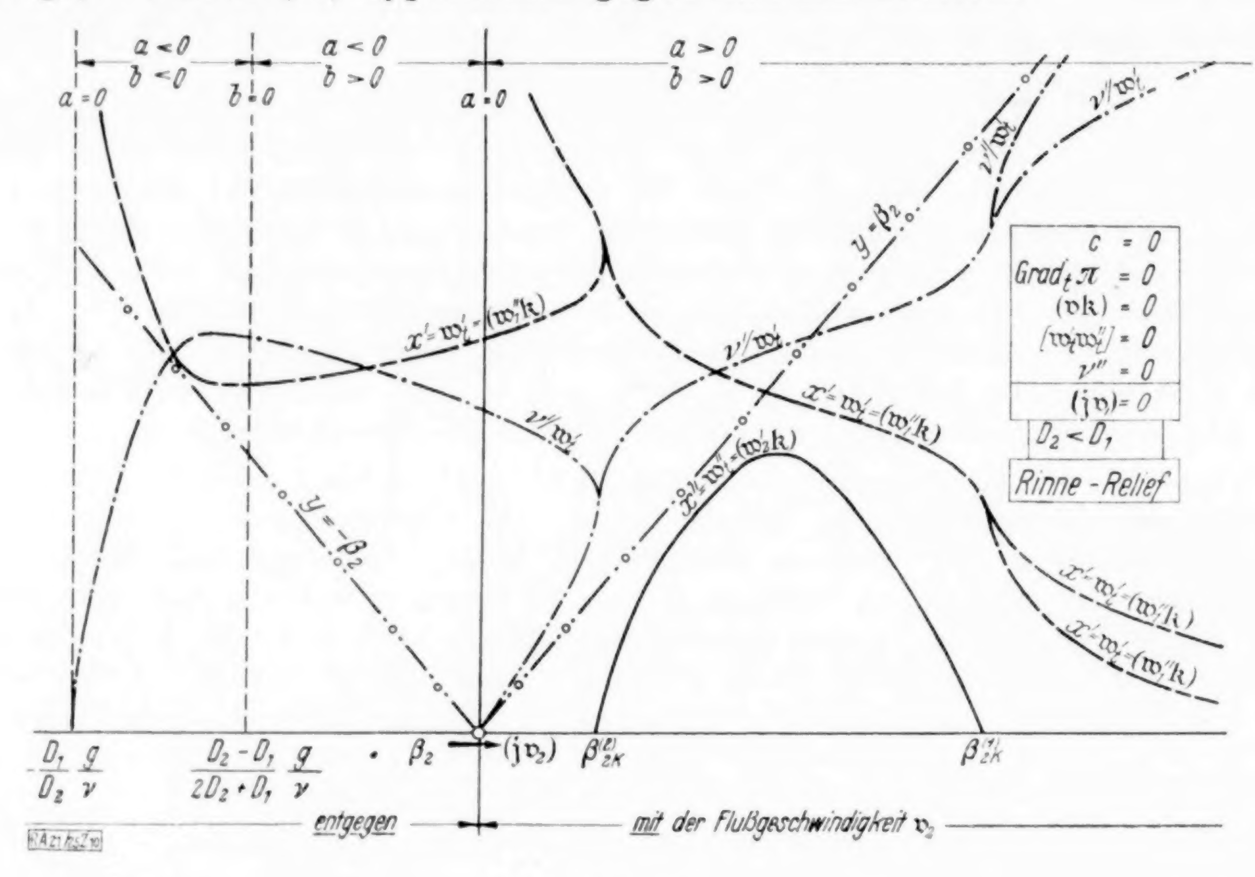


Abb. 10.

Wir bilden aus (9) den Anstieg

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{d\beta_2} &= -\frac{(2\nu D_2 \beta_2 + D_1 g)\,x_2 - (2 D_2 + D_1)\,\nu^2 x}{2ax + b} \\ &= -\frac{x}{\beta_2} \cdot \frac{\nu D_2 \beta_2^2 x^2 + (D_2 - D_1)\,\nu g x - (D_1 + D_2)\,\nu^3}{\beta_2 (\nu D_2 \beta_2 + D_1 g)\,x^2 - (D_1 + D_2)\,\nu^3} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

und beachten, daß $2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4(D_1 + D_2)\,\nu^3 a}$; $(\beta_2 x)_{\beta_2 = 0} = \frac{\nu}{2 D_1}\{(D_2 - D_1) \pm \sqrt{(D_2 - D_1)^2}\}$, worin für $\beta_2 = -0$, also $a = -0$, falls $D_2 > D_1$ nur das obere Wurzelvorzeichen gilt, dagegen für $\beta_2 = +0$, also $a = +0$, falls $D_2 < D_1$ beide Vorzeichen gelten. Nur für die beiden Abszissen $\beta_{2k}^{(1)}$ und $\beta_{2k}^{(2)}$ verschwindet $2ax' + b$. Da nun dort der Zähler von (13) nicht verschwindet, so ist dort der Anstieg unendlich groß, sofern zulässige x-Werte dort existieren. Der Anstieg verschwindet nur, wenn erstens x verschwindet, was für $\beta_2 = +\infty$ eintritt, oder wenn zweitens $x = \nu^2 (2 D_2 + D_1) : (2\nu D_2 \beta_2 + D_1 g)$ oder gleichwertig damit $(D_2 - D_1)\,\nu g x = (D_1 + D_2)\,\nu^3 - \nu D_2 \beta_2^2 x^2$. Da hierin rechts das erste Glied positiv und das dritte negativ, so existiert nur ein einziges negatives x und dieses muß nach dem vorangehenden Ausdruck stets unterhalb $\beta_2 = -{}^1/_2 \cdot D_1/D_2 \cdot g/\nu$ liegen; dabei muß, je nachdem $D_2 \gtrless D_1$, $x \gtrless \frac{\nu}{\beta_2}\sqrt{\frac{D_1 + D_2}{D_2}}$ sein. Wenn $x \simeq -\infty$ und $\beta_2 \neq 0$, was nur für

$\nu D_2 \beta_2 + D_1 g \simeq +0$ der Fall ist, nähert sich der Anstieg der Form $-x \nu D_2/(\nu D_2 \beta_2 + D_1 g) \simeq +\infty$. Wenn, $D_2 < D_1$ vorausgesetzt, $\beta_2 = +0$, ist $x = -\infty$ und der Anstieg $dx/d\beta_2 = -(D_2 - D_1)\nu g x^2/\beta_2{}^2 x^2 = +\infty$. Wenn $\beta_2 = -0$, ist für $x = -\infty$, was $D_2 > D_1$ voraussetzt, der Anstieg $-\infty$. Für $\beta_2 = 0$, also $a = 0$, ist $x = -(D_1 + D_2)\nu^3 : b$, was nur für $D_2 < D_1$ möglich ist; dann verschwindet im Zähler von (13) das zweite und dritte Glied, und im Nenner das zweite, die übrigen aber ergeben einen positiven Wert von $dx/d\beta_2$.

Im möglichen komplexen Gebiet $\left(\frac{D_2 - D_1}{2D_2 + D_1} \cdot \frac{g}{\nu} < \beta_2 < \beta_{2k}^{(1)}\right)$ für $D_2 > D_1$, sowie $(\beta_{2k}^{(2)} < \beta_2 < \beta_{2k}^{(1)})$ für $D_1 < D_2$ haben wir $x' = -b/2a$; $x'' = \pm \sqrt{\{4(D_1 + D_2)\nu^3 a - b^2\} : 4a^2}$ in ungedämpfter Welle. Beachten wir, daß in diesem Gebiete b vom Wert null ab linear ansteigt, gleichzeitig aber a mit positiven Werten beginnend parabolisch zunimmt, so ergibt sich, daß die x'-Kurve für $D_2 > D_1$ von null an gekrümmt nach dem Werte in $\beta_{2k}^{(1)}$ ansteigt, im Falle $D_2 < D_1$ von dem Werte in $\beta_{2k}^{(2)}$ gekrümmt nach dem Werte in $\beta_{2k}^{(1)}$ abfällt.

Aus den $|x'|$-Kurven ergeben sich weiter die Kurven der Wellengeschwindigkeit $\nu'/|x'|$. Für große β_2 ist der Anstieg $-\frac{\nu'}{x'^2} \cdot \frac{dx'}{d\beta_2} \simeq \frac{\nu'}{(\beta_2 x')_{\beta_2 = +\infty}}$. Für große positive β_2 hat also gemäß (10) die obere Geschwindigkeitskurve den Grenzrichtungswert 1 und die untere den Wert $D_2 : (D_2 + D_1) < 1$. — In $(\beta_2 = 0)$ ist für $x' = -\infty$ der Anstieg $4D_1(D_2 - D_1) : \{(D_2 - D_1) \pm \sqrt{(D_2 - D_1)^2}\}^2$. Für $\beta_2 = -0$ und $D_2 > D_1$ wird demnach der Anstieg $D_1 : (D_2 - D_1)$, welcher Wert zwischen ∞ und 0 liegen kann, sowie für $\beta_2 = +0$ und $D_2 < D_1$ wird der Anstieg $-D_1 : (D_1 - D_2)$, welcher Wert zwischen -1 und $-\infty$ schwankt. — Schließlich finden wir in $(\beta_2 = -D_1/D_2 \cdot g/\nu)$ den Anstieg $-\nu D_1 g/|b|$. Die Kurvenpunkte zu den beiden Abszissen $\beta_{2k}^{(1)}$ und $\beta_{2k}^{(2)}$ haben die Ordinaten $b/2(D_1 + D_2)\nu^2$ und der für die Abszisse $(\beta_2 = 0)$ die Ordinate $b/(D_1 + D_2)\nu^2$. Der Endpunkt der halben Ordinate zur Abszisse $(\beta_2 = 0)$ liegt also nach der Erörterung unter B mit den beiden anderen Kurvenpunkten auf einer Geraden, die durch den Fußpunkt der Senkrechten $(b = 0)$ läuft.

Im komplexen Gebiete $(x' = -b/2a)$ ergibt sich als einziger Schnittpunkt $x' = -D_1/(D_1 + D_2) \cdot \nu^2/g$. Auf seiten negativer β_2 ist in (8) einzusetzen $\beta_2 x' = +\nu'$. Damit finden wir $\beta_2 = (D_2 - 2D_1) : 2(2D_2 + D_1) \cdot g/\nu = \nu'/x'$. Für $D_2 < D_1$ gibt es nach Abb. 9 stets einen Schnittpunkt; für $D_2 > D_1$ schneidet die Gerade $y = -\beta_2$ die Wellengeschwindigkeits-Kurve nur einmal, für $D_2 < 2D_1$ existiert ein Schnittpunkt nicht.

Auch bei diesen Wellen mit Rinne-Querprofil gibt es zwei Gebiete mit sehr geringer Geschwindigkeit, doch sind sie klein. Außer der Unmöglichkeit dieser Welle in gewissen Gebieten der Flußgeschwindigkeit bei Gegenlauf, sowie bei Mitlauf im Gebiet $\left(0 < \beta_2 < \frac{D_2 - D_1}{2D_2 + D_1} \cdot \frac{g}{\nu}\right)$ ist noch das Auftreten von Tangential-Verlöschung $e^{(w_t'' \nu)}$ in ungedämpfter Welle zu nennen; im Gegensatz zur Grat-Welle tritt diese bei der Rinne-Welle sowohl für $D_2 > D_1$ als auch für $D_2 < D_1$ auf, aber nur, falls die Welle mit dem Flusse $(\mathfrak{v}_2)$ läuft. — Wenn $D_2 > D_1$, ist bei gleicher Richtung von Fluß und Welle die Geschwindigkeit der Welle ohne Tangential-Verlöschung stets kleiner als die des Flusses. Wenn $D_2 > 2D_1$, ist die Wellengeschwindigkeit, falls sie dem Flusse entgegengerichtet ist, stets kleiner als die Flußgeschwindigkeit.

D. **Das zweite Mittel, das untere, ruhe oder bewege sich quer zur Welle, also $\beta_2 = 0$**; Abb. 7 bis 10. Dann vereinfacht sich Gl. (1') wiederum zu der quadratischen Gleichung

$$\left.\begin{aligned} a x^2 - (\pm)\, b x + (D_1 + D_2)\nu^3 &= 0 \\ \text{mit der Parabel} \qquad a &= \beta_1 \{\nu D_1 \beta_1 + (\pm) D_2 g\} \\ \text{und der Geraden} \qquad b &= \nu^2 \{(2D_1 + D_2)\beta_1 + (\pm)(D_2 - D_1) g/\nu\} \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots \quad (14)$$

als Hilfskurven.

Die Untersuchung von (14) lehrt, daß der Fall D auf den Fall C in allen Einzelheiten zurückführbar ist, indem man die Zeiger von β und D vertauscht sowie die Einsätze (+) und (—), jedoch die Ungleichheitszeichen $>$ und $<$ unverändert läßt.

Für die Welle mit Grat-Relief gilt also der Form nach

die Abb. 10 für $D_2 > D_1$, die Abb. 9 für $D_2 < D_1$

und für die Welle mit Rinne-Relief

die Abb. 8 für $D_2 > D_1$, die Abb. 7 für $D_2 < D_1$.

3. Resonanzfähigkeit von flüssigen und gasigen Körpern im Schwerefelde. Wie bei den reinen Kapillarwellen legen wir uns jetzt die Frage vor, wann bei reinen Schwerewellen an einer horizontalen U-Fläche ein »stehender Wellenzustand« von elementarer Schwankungsform möglich ist. Die erste Vorbedingung ist, daß die Wellenquelle ungedämpft schwinge, also ν reell sei. Die zweite Vorbedingung ist, daß in jeder der möglichen geführten Wellen die Wellenlänge $2\pi/\mathfrak{w}_t'$ dieselbe bleibe, wenn für sie die Flüsse $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ entgegengesetzte Richtung haben, als für beide angenommen ist. Die dritte Vorbedingung ist, daß in ihr keine Tangential-Verlöschung $e^{(\mathfrak{w}_t'' \tau)}$ auftrete. Diese Vorbedingungen verlangen mithin, daß die Grundgleichung (1') im vorangehenden Abschnitt auch gelte, wenn wir bei reellem ν in ihr β_1 und β_2 durch $-\beta_1$ und $-\beta_2$ ersetzen, sowie daß die dann noch möglichen Wurzeln x reell seien. Wir bekommen so durch Addition bzw. Subtraktion die beiden Simultangleichungen

$$\left.\begin{aligned} &A\cdot x^2 - B\cdot x + C = 0; \qquad L\cdot x^2 + M\cdot x + N = 0 \\ &\qquad \text{mit } B = (D_2 - D_1)\,g \neq 0; \qquad C = (D_1 + D_2)\,\nu^2 \neq 0; \\ &A = 2(D_1 + D_2)\,\beta_1\beta_2 + D_1\beta_1{}^2 + D_2\beta_2{}^2; \qquad L = (D_1\beta_1 + D_2\beta_2)\,\beta_1\beta_2; \\ &M = (D_1\beta_2 - D_2\beta_1)\,g; \qquad N = \nu^2\{(2D_1 + D_2)\,\beta_1 + (2D_2 + D_1)\,\beta_2\} \end{aligned}\right\} \quad (1),$$

wobei, da ν reell sein soll, alle Beiwerte reell ausfallen. Die Gleichungen sind von den Einsätzen ($\pm$) frei geworden, gelten also sowohl für Grat- als auch für Rinne-Wellen.

Eliminieren wir in (1) einmal x^2, so kommt $x = (CL - AN):(BL + AM)$. Die x fallen also reell aus, erfüllen somit auch die dritte Vorbedingung. Ferner erweist sich x als einwertig. Je nachdem x positiv oder negativ ausfällt, ist nur die Grat-Welle bzw. die Rinne-Welle möglich. Eliminieren wir in (1) zum anderen Mal x, so kommt $x^2 = -(CM + BN):(BL + AM)$. Wir haben daher folgende Gleichung für x mit zwei Nebenbedingungen:

$$\frac{CM + BN}{BL + AM} = -\left\{\frac{CL - AN}{BL + AM}\right\}^2 = -x^2 < 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Da g nur in B und M auftritt und ν^2 nur in C und N, so ist x proportional ν^2/g. Die möglichen Wellenlängen $2\pi/\mathfrak{w}_t'$ sind somit proportional der Schwere g und umgekehrt proportional dem Quadrate der Frequenz ν. Ferner ist der stehende Wellenzustand nur für gewisse Flüsse $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ möglich; ja, unter Umständen ist er sogar unmöglich! Ist er möglich, dann gibt es bei gegebener Frequenz nur eine einzige mögliche Wellenlänge. Wir wollen einige einfache Fälle daraufhin untersuchen. Es sei

α) $\beta_1 = 0 = \beta_2$, so daß $A = 0$; $L = 0$; $M = 0$; $N = 0$.

Da somit die zweite Gleichung unter (1) erfüllt ist, so hat man nach der ersten

$$x = C/B = \frac{D_2 + D_1}{D_2 - D_1}\cdot\frac{\nu^2}{g} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2_\alpha).$$

Auf diesen Ausdruck stößt man auch, wenn in (2) lediglich A den Wert null annimmt, was auf gewisse Verhältnisse β_2 zu β_1 führt.

β) $\beta_1 = 0$, so daß $A = D_2\beta_2{}^2$; $L = 0$; $M = D_1\beta_2 g$; $N = \nu^2(2D_2 + D_1)\,\beta_2$,

mithin nach (2)

$$\nu^2\frac{2D_2/D_1}{\beta_2{}^2} = -\left(\frac{N}{M}\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2_\beta),$$

was unmöglich ist;

γ) $\beta_2 = 0$, so daß $A = D_1\beta_1{}^2$; $L = 0$; $M = -D_2\beta_1 g$; $N = \nu^2(2D_1 + D_2)\,\beta_1$,

mithin nach (2)

$$\nu^2\frac{2D_1/D_2}{\beta_2{}^2} = -\left(\frac{N}{M}\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2_\gamma),$$

was unmöglich ist.

δ) $\beta_1 = \beta_2 = \beta \neq 0$, so daß $A = 3(D_1 + D_2)\,\beta^2$; $L = (D_1 + D_2)\,\beta^3$;

$M = -(D_2 - D_1)\,\beta g$; $N = 3(D_1 + D_2)\,\nu^2\beta$,

mithin nach (2)

$$-\frac{\nu^2}{\beta^2} = -16\frac{\nu^4}{g^2}\left\{\frac{D_2 + D_1}{D_2 - D_1}\right\}^2 = -x^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2_\delta),$$

was möglich ist.

Die Wellenlänge ist gerade viermal so klein als im Falle (2_α), wo beide Mittel ruhen, und die einzig möglichen Flußgeschwindigkeiten müssen beide gerade der Wellengeschwindigkeit gleich sein.

ε) $\beta_2 = -\beta_1$, so daß $A = -(D_1 + D_2)\beta^2; \quad L = (D_2 - D_1)\beta^3;$

$$M = -(D_1 + D_2)\beta g; \quad N = -(D_2 - D_1)\nu^2\beta;$$

mithin nach (2)

$$-\frac{\nu^2}{\beta^2} = 0 = -x^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2_\varepsilon),$$

was unmöglich ist.

ζ) $D_1\beta_1 + D_2\beta_2 = 0$, so daß $A = -2(D_1 + D_2)\frac{D_1}{D_2}\beta_1{}^2; \quad L = 0;$

$$M = -\frac{D_1{}^2 + D_2{}^2}{D_2{}^2}\cdot D_2\beta_1 g; \quad N = \frac{D_2{}^2 - D_1{}^2}{D_2{}^2}\cdot D_2\nu^2\beta_1,$$

mithin nach (2)

$$-2\frac{D_2{}^2}{D_1{}^2 + D_2{}^2}\cdot\frac{\nu^2}{\beta_1{}^2} = -\frac{\nu^4}{g^2}\left\{\frac{D_2{}^2 - D_1{}^2}{D_2{}^2 + D_1{}^2}\right\}^2 = -x^2 \quad \ldots \ldots (2_\zeta),$$

was möglich ist.

Da somit $x = \frac{D_2 + D_1}{D_2 - D_1}\cdot\frac{\nu^2}{g}\cdot\left\{1 - \frac{2D_1D_2}{D_1{}^2 + D_2{}^2}\right\}$, ist die mögliche Wellenlänge größer als wie im Falle (2_α), wo beide Mittel ruhen. Zu ihr gehört eine bestimmte Flußgeschwindigkeit $\beta_1 = \sqrt{\frac{2}{1 + (D_1/D_2)^2}}\cdot\frac{\nu}{x}$, die niemals größer als das $\sqrt{2}$-fache der Wellengeschwindigkeit sein kann.

η) Hat der Flüssigkeitskörper eine **freie** Oberfläche, dann muß sein [1])

$$(\mathfrak{w}\mathfrak{k})g + i\{\nu - (\mathfrak{v}\mathfrak{w})\}^2 = 0,$$

also $(\nu - \beta x)^2 = \pm gx$. Daraus folgt nach den obigen Forderungen

$$x = \pm\frac{\nu^2}{g}; \quad \beta = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2_\eta).$$

Nur bei Flüssigkeitsruhe ist ein stehender Wellenzustand möglich.

Wir können nun die Frage nach der **Resonanzfähigkeit** von Flüssigkeitskörpern im Schwerefelde beantworten, sofern es hinreicht, jedes Stück der geführten Welle an U als planwellig anzusehen. Resonanz-Schwingungen sind Ueberlagerungswirkungen von mit- und gegenläufigen, gangverschobenen, geführten Wellen an geschlossenen U-Flächen derart, daß festliegende Knoten und Bäuche sich haben ausbilden können. Dazu sind zu den bisher vorgebrachten drei Vorbedingungen zwei weitere erforderlich: der Körper mit freier oder unfreier Oberfläche muß symmetrische Form haben, und überall an seiner Oberfläche muß derselbe Wellentyp herrschen. Schließlich muß bei gegebenem ν der Körper in und entgegen der Richtung der Wellenfortpflanzung eine Abmessung haben, die gerade ein volles Vielfache der Halbwellenlänge ausmacht. Umgekehrt gibt es für jeden bestimmten Körper obiger Beschaffenheit eine gewisse Reihe von diskreten Werten der Frequenz ν, die allein den stehenden Wellenzustand einleiten und erhalten können.

A. **Der Gravitations-Mittelpunkt befinde sich in der Mitte des vorausgesetzten Körpers, so daß das Schwerefeld überall an seiner Oberfläche nach innen gerichtet ist.** Ist dann die Flüssigkeit der Umgebung oder des Körpers in Ruhe (Fälle 2_β und 2_γ) oder sind beide Flüssigkeiten in entgegengesetzt gleicher Bewegung (Fall 2_ε), dann ist eine Resonanzfähigkeit nicht vorhanden. Sind dagegen beide Mittel an U in Ruhe oder in zueinander gleichgerichteter Bewegung (Fälle 2_α und 2_δ) oder hat der Körper eine freie Oberfläche und ist an ihr die Flüssigkeit in Ruhe (Fall 2_η), oder verschwindet die Summe der Bewegungsgrößen der beiden Flüsse (Fall 2_ζ), dann besteht eine Resonanzfähigkeit, jedoch nur für einen vorgeschriebenen Wert der Flußgeschwindigkeiten. Nehmen dabei die Wellenlängen nach der natürlichen Zahlenreihe ab, so nehmen nach dem oben entwickelten Hauptsatze die Frequenzen **nicht** nach derselben Zahlenreihe zu.

B. **Der Gravitations-Mittelpunkt befinde sich außerhalb des Flüssigkeitskörpers, derart, daß die Kraftlinien ihn einseitig durchsetzen.** Wir müssen dann zwischen einer oberen und unteren Seite des Körpers unterscheiden. Die

[1]) K. Uller, Die mehrfach geführten Wellen in mehreren fließenden Mitteln. Diese Zeitschr. 8 (1928) 283 § 1, Gl. (28').

oben genannten Fälle unmöglicher Resonanz gelten natürlich auch hier. Es bleiben die vier anderen angeführten Fälle noch zu berücksichtigen. Der Körper sei insbesondere homogen und habe größere horizontal liegende Oberflächenstücke; für unsere Schlußfolgerung dürfen wir von den Stücken, für die $\mathrm{grad}_t\, \Pi \neq 0$ ist, absehen. Die Werte an der Unterseite unterscheiden wir durch Bestrichung. Sind nun beide Mittel an U in Ruhe, dann haben wir (nach $2\,a$) an der Unterseite $x' = \frac{D_2' + D_1'}{D_2' - D_1'} \cdot \frac{\nu^2}{g}$ mit $D_2' = D_1$ und $D_1' = D_2$, also $x' = \frac{D_1 + D_2}{D_1 - D_2} \cdot \frac{\nu^2}{g} = -\,x$, das verstößt aber gegen die fünfte Vorbedingung. Eine Resonanzfähigkeit ist also nicht vorhanden. Das gilt auch in den anderen Fällen, wobei es nichts ausmacht, ob die Flußgeschwindigkeiten oben und unten im Raume gleich oder entgegen gerichtet sind. Nur im Falle einer freien Oberfläche mit Flüssigkeitsruhe ist eine Resonanzfähigkeit vorhanden.

4. Schlußworte. Aus unserer annahmenfreien Untersuchung geht hervor, daß schon unter den Beschränkungen: die Wellenquelle schwinge ungedämpft periodisch ($\nu'' = 0$); die U-Ebene sei horizontal ($\mathrm{grad}_t\, \Pi = 0$) und zeige keine seitliche Bewegung $[(\mathfrak{v}\,\mathfrak{k}) = 0]$; die geführte Welle sei einfach ($[\mathfrak{w}_t'\, \mathfrak{w}_t''] = 0$), die geführte Welle auch eine Tangential-Verlöschung $e^{(\mathfrak{w}_t''\, \mathfrak{r})}$ längs U aufweist. Bei reinen Schwerewellen sind die Grenzen dieser Gebiete nur abhängig von dem Verhältnis der beiden Dichten sowie von dem Verhältnis der Schwere g zu der Frequenz ν'. Im allgemeinen tritt die Tangential-Verlöschung, die eine Stauung der Energie bedeutet, stets auf. Es verlangt nämlich die Existenz zweier Wellenflächen-Systeme sowie die Wellenkohärenz und die Stetigkeit der Normalgeschwindigkeit an U ein keilförmiges Wellenflächen-System, wie es die Abb. 11 zeigt. Es existiert somit kein Gesetz, wonach die Phasen-Ebenen senkrecht zu U stehen müßten. Damit ist dem bisherigen Rechenverfahren der Boden unter den Füßen entzogen. Das Wellenflächen-System zeigt ferner völlige Symmetrie in bezug auf die U-Ebene, wie verschieden dicht und bewegt beide Mittel auch seien. Infolgedessen haben wir auch eine völlige Symmetrie des Geschwindigkeitsfeldes ($\mathfrak{V}$) der geführten Welle, aber ein solches mit entgegengesetzter Polarisation in beiden Mitteln. Erst durch die Druckbedingung an U kommen die beiden Dichten

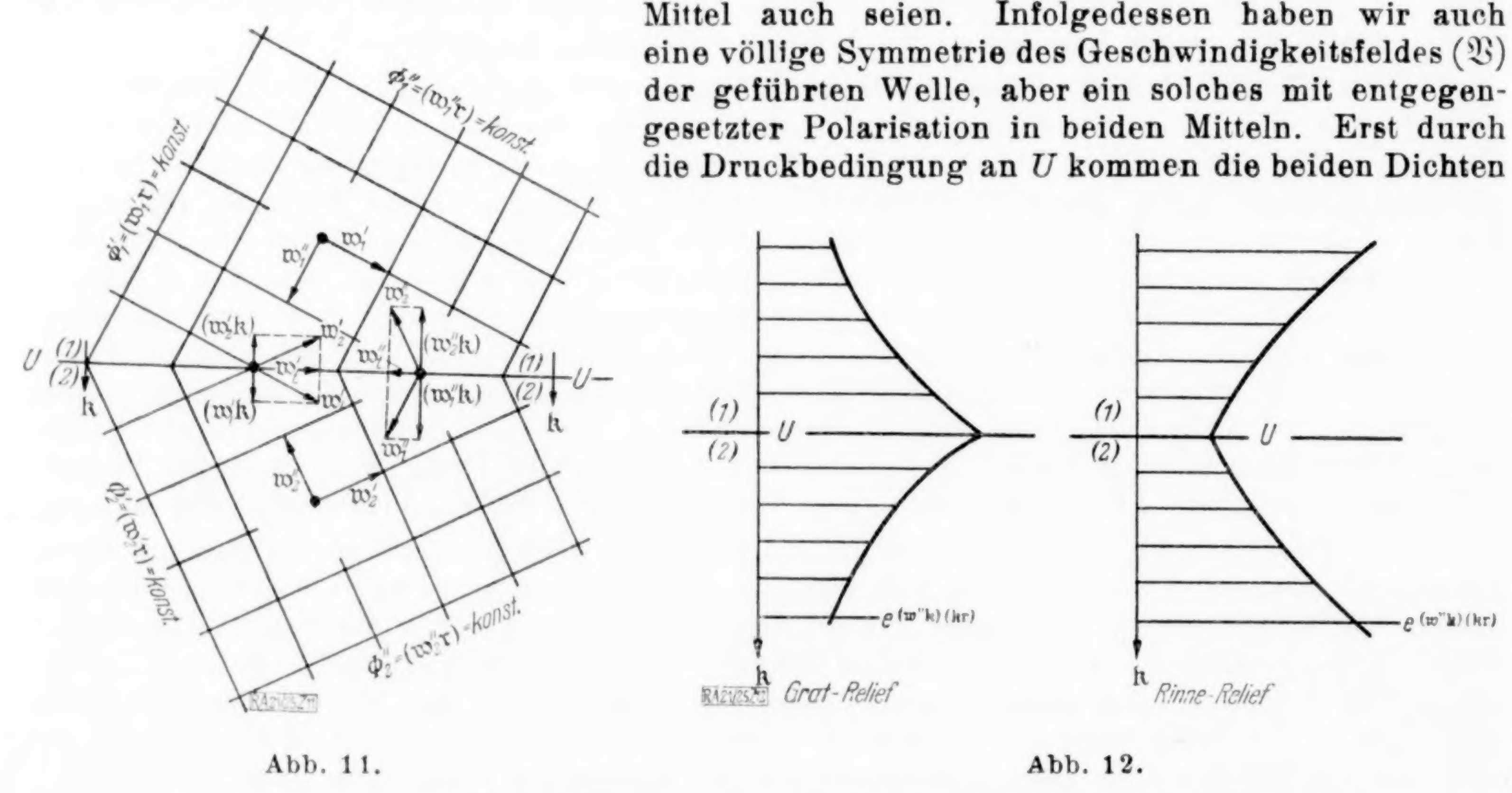


Abb. 11. Abb. 12.

Keilförmiges Wellenflächen-System in der einfach geführten Planwelle der Fluidik.

und die beiden Flußgeschwindigkeiten in die Felddarstellung hinein. Durch sie wird das Druckfeld (P) der geführten Welle unsymmetrisch. Wegen des horizontalen Druckgefälles längs U findet eine horizontale Versetzung des Flüssigen seitens der geführten Welle statt. Insbesondere können danach ruhende Flüssigkeitskörper durch geführte Wellen an ihren Oberflächen und Schichten in rotierende Bewegung versetzt werden, eine Erkenntnis, die vielleicht auch in der Kosmogonie von Wert ist. — Quer zu U fallen die Amplituden nicht nur beiderseits ab (Grat-Relief), sie können auch beiderseits ansteigen (Rinne-Relief), siehe Abb. 12. Letztere Form kann auftreten, wenn benachbarte U-Flächen vorhanden sind und sich eine mehrfach geführte Welle ausbildet.

Bei nur schwach gedämpft schwingender Quelle gewinnen wir den zeitlichen Mittelwert der Energieströmung $\mathfrak{R} = P \cdot \mathfrak{V}$ in einer Welle der Fluidik von harmonischer Schwankungsform, wenn wir die Ausdrücke[1]) für P und $\mathfrak{V}$ miteinander multiplizieren und dann die Glieder mit dem Faktor $e^{i\nu t}$ oder $e^{-i\nu^* t}$ oder $e^{i2\nu t}$ oder $e^{-i2\nu^* t}$ streichen. Es kommt so, wenn wir von der Leistung der Schwere zunächst absehen:

$$\overline{\mathfrak{R}} = \frac{D}{4}\,\omega\,\omega^* \cdot e^{-2(\nu'' t - \Phi'')} \left\{ \{\nu^* - (\mathfrak{v}\mathfrak{w}^*)\}\,\mathfrak{w} + \{\nu - (\mathfrak{v}\mathfrak{w})\}\,\mathfrak{w}^* \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Nur wenn $\nu = \nu^*$ und $(\mathfrak{v}\mathfrak{w}/\nu) = (\mathfrak{v}\mathfrak{w}^*/\nu^*)$, also wenn $\nu'' = 0$ und $\mathfrak{v} = 0$, hat $\overline{\mathfrak{R}}$ die Richtung der Phasennormale $\mathfrak{w}'$. — In einer geführten Welle ist die Normalkomponente $(\overline{\mathfrak{R}}\,\mathfrak{k})$ unstetig, wenn Grenzflächenspannungen vorhanden sind. Sind diese vernachlässigbar, dann fließt die Energie im Zeitmittel nur dann parallel zur U-Fläche, wenn beide Mittel ruhen, die Quelle ungedämpft schwingt und die geführte Welle keine Tangential-Verlöschung zeigt. Berücksichtigen wir aber noch die Leistung der Schwere, so tritt zu (1) noch das additive Glied

$$\overline{\mathfrak{R}}_g = -\frac{\omega\,\omega^*}{4\,i} \cdot e^{-2(\nu'' t - \Phi'')} \left\{ \frac{(\mathfrak{w}^*\,\mathrm{grad}\,\Pi)}{\nu^* - (\mathfrak{v}\mathfrak{w}^*)}\,\mathfrak{w} - \frac{(\mathfrak{w}\,\mathrm{grad}\,\Pi)}{\nu - (\mathfrak{v}\mathfrak{w})}\,\mathfrak{w}^* \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1_g).$$

Dann strömt die Energie selbst unter obigen Einschränkungen im Zeitmittel nicht parallel der U-Fläche, es sei denn, daß $(\mathfrak{w}_t\,\mathrm{grad}\,\Pi)$ verschwindet, in welchem Falle $(\overline{\mathfrak{R}}_g\,\mathfrak{k}) = 0$ ist. 21/25

Berichtigung: In den Prager Vorträgen, diese Zeitschr. Bd. 9 (1929), S. 507, 6. Zeile von oben, lies: Phasenebenen statt Phasen.

Ueber Versicherungswerte unter Berücksichtigung der Abweichungen von den Tafelwerten.

Von **STEFAN VAJDA** in Wien.

Die Lehre von den Versicherungswerten und ihrer Berechnung aus der Sterbetafel ist seit langem abgeschlossen. Einfache Prinzipien gestatten, für jede beliebige Versicherungskombination die Werte der Ansprüche zu bestimmen. Die Aufstellung der Differentialgleichung[2]) einer allgemeinen Versicherung

$$\frac{\partial\,{}_tV_x}{\partial t} = {}_tV_x\,(\mu_{x+t} + \delta) - \mu_{x+t}\,U_{x+t} + P_{x+t}\,.$$

in der ${}_tV_x$ das Netto-Deckungskapital des x-jährigen nach t Jahren, μ_{x+t} seine Sterbensintensität und U_{x+t} bzw. P_{x+t} die Sterbefallzahlungen an den Versicherten und seine Prämien bedeuten, gibt den Berechnungsprinzipien auch insofern einen befriedigenden Abschluß, als auf die Diskontinuität verzichtet wird und jede Berechnung auf ein einheitliches Prinzip, das der Gewinn- und Verlustrechnung, zurückgeführt wird[3]).

Die Theorie hat sich nun mit zwei Fragen zu beschäftigen. Zunächst mit den rein statistischen Untersuchungen der Sterbens- und der andern »Wahrscheinlichkeiten«, die uns hier nicht weiter interessieren sollen. Die Lexissche Dispersionstheorie liefert die Grundlagen für diese Untersuchungen. In einer andern Richtung liegen Probleme, die sich mit den Abweichungen von der Sterbetafel beschäftigen. Es lassen sich hier zwei große Gruppen unterscheiden, deren Typus wir an einer kurzen Todesfallversicherung wie folgt charakterisieren können:

Es wird entweder eine einzelne Versicherung als Durchschnittsversicherung betrachtet; die Wahrscheinlichkeit für das Ableben des Versicherten in den einzelnen Versicherungsjahren wird auf Grund der Tafel berechnet. Die Betrachtung der dadurch für den Versicherer entstehenden Gewinne und Verluste liefert ein Maß der Unsicherheit des Versicherungsunternehmens. So verfährt die übliche Risikotheorie. Auf die Abweichungen eines großen Versicherungsbestandes von den in der Tafel gegebenen Durchschnittswerten wird keine Rücksicht genommen und die logische Begründung für die Anwendung

[1]) K. Uller, Die geführten Schwerewellen an der Grenze zweier fließenden Mittel. Diese Zeitschrift Bd. 7, 129 (1927), § 3 Gl. (6'), (11) und (13).

[2]) Loewy, Zur Theorie und Anwendung der Intensitäten in der Versicherungsmathematik. Heidelberger Sitzungsberichte, Abteilung A (1917).

[3]) Berger A., Die Prinzipien der Lebensversicherungstechnik, I Berlin 1923, S. 21, Formel (34).

der Größe $\sqrt{A_x' - A_x^2}$ als Maß der Abweichungen ist nur auf einem Umwege möglich. Wir müssen also wohl den andern Typus derartiger Betrachtungen für natürlicher halten, der außer den Tafelwerten noch eine Verteilungsfunktion der Abweichungen von diesen Werten in jedem Alter als gegeben annimmt [1]).

So verfährt z. B. Hattendorf [2]). Er nimmt an, daß die Verteilung der Abweichungen der tatsächlich beobachteten Anzahl der Toten von der tafelmäßigen in jedem ganzzahligen Alter der Gaußschen Fehlerfunktion entspricht [3]).

An drei Stellen kann hier eine Kritik einsetzen.

Zunächst versucht die vorliegende Arbeit, sich von der Beschränkung auf ganzzahlige Alter freizumachen, um Anschluß an die in der Theorie der Versicherungswerte bereits durchgebildete kontinuierliche Betrachtung zu gewinnen. Ferner scheint die Annahme der Fehlergesetze in der Gauß-Laplaceschen Form

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 w^2}$$

zu speziell zu sein.

Den dritten Charakter der Hattendorfschen Betrachtungsweise wollen wir aber nicht verändern, wir wollen nämlich aus Gründen der Einfachheit auch die Abweichungen der Totenzahlen betrachten, obwohl die Abweichungen der Intensitäten einen natürlicheren Zugang zu unserer Problemstellung zu bilden scheinen.

Wir dürfen aber die Abweichungen der Totenzahlen betrachten und sie in unsere Betrachtungen als voneinander unabhängig einführen, wenn wir bedenken, daß die Abweichungsgesetze bloß dann wesentlich von den früher vorgekommenen Totenzahlen beeinflußt werden, wenn diese extreme Werte angenommen haben, für die wieder die Wahrscheinlichkeit gering ist. (So wird sich z. B. ein Verteilungsgesetz auf die Gewißheit für die Totenzahl 0 dann und nur dann reduzieren, wenn bis zum betrachteten Zeitpunkt sämtliche Versicherte bereits gestorben sind.) Die so eingeführte Ungenauigkeit ist analog derjenigen, die wir begehen werden, indem wir das Intervall der möglichen Abweichungen über alle reellen Zahlen erstrecken.

Allerdings müssen wir uns dann — und dies wird im folgenden geschehen — auf ein festes Ausgangsalter x beschränken, indem wir die Abweichungsgesetze als für dieses Ausgangsalter gegeben betrachten, in dem Sinne, wie sich etwa eine Selekttafel auf ein Ausgangsalter bezieht.

1. Aufstellung der Formeln. Wir betrachten also eine Sterbetafel, die uns für jedes Alter $x + t$, wobei wir t kontinuierlich veränderlich denken, den Grenzwert der Totenzahlen während der Zeiteinheit angibt Diesen Tafelwerten legen wir die Bedeutung bei, daß von allen überhaupt beobachtbaren Totenzahlen die in der Tafel angegebenen auf Grund irgendeines Verfahrens abgeleitet sind, daß sie etwa die für das betreffende Alter am häufigsten beobachteten sind. Ferner sei für jedes Alter eine Funktion $v(\lambda,\sigma)$ gegeben, die die Wahrscheinlichkeit für eine Abweichung $\sigma_\lambda = d_{x+\lambda} - \delta_{x+\lambda}$ angibt, wobei $d_{x+\lambda}$ und $\delta_{x+\lambda}$ die tafelmäßigen und die tatsächlich eintretenden Zahlen der Toten sind. Aus der Kenntnis der Tafelwerte und der Funktionen $v(\lambda,\sigma)$ muß sich jeder Versicherungswert berechnen lassen, wobei dann in ihm auch die Abweichungen von den Tafelwerten mit entsprechenden Gewichten berücksichtigt sind.

Wir betrachten nun eine Gruppe von l_x x-jährigen und verfolgen das Absterben dieser Gruppe von der Zeit 0 an.

Zunächst stellen wir uns die Aufgabe, aus den $v(\lambda, \sigma)$ die Funktion $f(a)$ abzuleiten, die uns die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, daß die Summe der Barwerte der Auszahlungen bis zur Zeit n gerade a beträgt, wenn an alle zur Zeit t Sterbenden die Summe U_t sofort nach ihrem Tode zur Auszahlung gelangt.

Wir gehen dazu so vor: wir teilen die Zeit von 0 bis n in n gleiche Teile, verlegen die Sterbefälle ans Ende dieser Perioden und lassen die Auszahlungen ebenda fällig werden.

[1]) Während der Drucklegung erschienen die Berichte zum 9. internationalen Aktuarkongreß, die im Teil D (Risikotheorie) interessante Untersuchungen von diesem zweiten Typus bringen. Siehe z. B. die Arbeiten von O. Gruder und H. Rietz.

[2]) Hattendorf, Masius Rundschau der Versicherungen, Bd. 18, Leipzig 1868.

[3]) Küttner, Das Risiko auf dem VI. internationalen Kongreß ..., in Mitteilungen des österr. Verbandes der Privatversicherungsanstalten, August 1910.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß zur Zeit 1 die Größe $d_{x+1} - \delta_{x+1}$ gerade σ_1 beträgt, ist $v(1, \sigma_1)$, analoge Ausdrücke bekommen wir für das Ende der andern Perioden. Wir wollen diejenigen Kombinationen der $\sigma_i\,(i = 1, 2, \ldots n)$ heraussuchen, die zu einer Gesamtauszahlung vom Barwerte a führen. Wir müssen also den Ausdruck

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(1, \sigma_1)\, d\sigma_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} v(2, \sigma_2)\, d\sigma_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} v(n, \sigma_n)\, d\sigma_n \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

mit einem Faktor multiplizieren, der nur dann 1 (und sonst 0) ist, wenn die Kombination der σ_i zum Barwerte a führt.

Bekanntlich ist das »Dirichletsche Integral« $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\, dx$ gleich Null für $a \neq 0$ und gleich Eins für $\alpha = 0$.

Da ein Wert σ_λ zu einem Barwerte der zugehörigen Auszahlung $U_\lambda v^\lambda (d_{x+\lambda} - \sigma_\lambda)$ führt, so benutzen wir den Faktor

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it(\sum_\lambda U_\lambda v^\lambda [d_{x+\lambda} - \sigma_\lambda] - a)}\, dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Unsere Funktion wird daher

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \prod_{\lambda=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda, \sigma_\lambda)\, e^{it(d_\lambda - \sigma_\lambda)\, U_\lambda v^\lambda}\, d\sigma_\lambda \right\} e^{-ait}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sum_{i=1}^{n} [\lg \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda, \sigma_\lambda)\, e^{it(d_\lambda - \sigma_\lambda)\, U_\lambda v^\lambda}\, d\sigma_\lambda] - ait}\, dt \quad \ldots \quad (3).$$

Nun gehen wir zu immer engerer Periodeneinteilung der Zeit von 0 bis n über und machen den Grenzübergang, der die Summe in ein Integral überführt. Die endgültige Formel wird daher:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\int_0^n \lg \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda, \sigma)\, e^{it(d_\lambda - \sigma_\lambda)\, U_\lambda v^\lambda}\, d\sigma\, d\lambda - ait}\, dt \quad \ldots \quad (4).$$

Für die weitere Verwendung, insbesondere für die Berechnung der Momente, ist es zweckdienlicher, dieselbe Formel auf einem andern Wege, nämlich mit Hilfe der charakteristischen Funktionen abzuleiten, wozu wir übergehen wollen.

2. Die charakteristischen Funktionen. Zuvor erinnern wir kurz an die für uns im folgenden wesentlichen Punkte der Lehre von den charakteristischen Funktionen [1]).

Wenn $f(x)\, dx$ die Wahrscheinlichkeitsdichte von x angibt, so nennen wir

$$\varphi_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{itx}\, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

die charakteristische Funktion von x.

Mit ihr hängt $f(x)$ auf Grund des sogenannten Fourierschen Umkehrtheorems wie folgt zusammen

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, e^{-itx}\, dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b).$$

Ist $g(y)\, dy$ die Wahrscheinlichkeitsdichte von y, so ist die charakteristische Funktion von $x + y$, falls die beiden veränderlichen Größen x und y voneinander unabhängig sind.

$$\varphi_{x+y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(y)\, e^{it(x+y)}\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{itx}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, e^{ity}\, dy = \varphi_x(t)\, \varphi_y(t) \quad (c).$$

Schließlich brauchen wir noch den Satz, daß

$$\varphi_t^{(k)}(o) = i^k \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, x^k\, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d),$$

---

[1]) **Darmois**, Statistique mathematique, Paris 1928.

daß sich also die Momente durch die Ableitungen der charakteristischen Funktionen ausdrücken lassen.

Die zu $v(\lambda,\sigma)$ gehörige Funktion ist nun

$$\varphi(\lambda,t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda,\sigma)\, e^{it(d_\lambda-\sigma)\, U_\lambda v^\lambda}\, d\sigma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5),$$

denn $v(\lambda,\sigma)$ ist die Wahrscheinlichkeit einer Auszahlung $(d_\lambda - \sigma)\, U_\lambda$.

Die charakteristische Funktion der Summe der Barwerte der Auszahlungen an den Enden der ganzjährigen Perioden ist nach (c)

$$\prod_{\lambda=1}^{n} \varphi(\lambda,t)$$

und ihr Logarithmus

$$\psi(t) = \sum_{\lambda=1}^{n} lg\, \varphi(\lambda,t).$$

Gehen wir hier zur kontinuierlichen Aenderung von λ über, so wird

$$\psi(t) = \int_0^n lg\, \varphi(\lambda,t)\, d\lambda$$

und

$$e^{\psi(t)} = \varphi(t) = e^{\int_0^n \lg \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda,\sigma)\, e^{it(d_\lambda-\sigma)\, U_\lambda v^\lambda}\, d\sigma\, d\lambda}.$$

Auf Grund von (b) ist die gesuchte Funktion

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\int_0^n \lg \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda,\sigma)\, e^{it(d_\lambda-\sigma)\, U_\lambda v^\lambda}\, d\sigma\, d\lambda}\, e^{-ita}\, dt \quad . \; . \; . \; . \quad (4).$$

Nun wollen wir den Erwartungswert des Barwertes der Auszahlungen, also $\int f(a)\, a\, da$ bestimmen. Dazu benutzen wir die Formel (d) für $k = 1$. Es ist zunächst

$$\varphi(o) = e^{\int_0^n \lg \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda,\sigma)\, d\sigma\, d\lambda} = 1 \qquad \text{wegen} \quad \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda,\sigma)\, d\sigma = 1$$

wie zu erwarten.

Ferner ist

$$\left.\begin{aligned} \varphi'(t) &= \varphi(t) \int_0^n d\lambda\, \frac{\int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda,o)\, e^{it(d_\lambda-\sigma)\, U_\lambda v^\lambda} \frac{d}{dt}\left[it(d_\lambda - o)\, U_\lambda v^\lambda\right] d\sigma}{\int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda,\sigma)\, e^{it(d_\lambda-\sigma)\, U_\lambda v^\lambda}\, \delta\, d\sigma} \\ &= \varphi(t) \int_0^n d\lambda\, \frac{U_\lambda v^\lambda\, i \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda,\sigma)\, e^{-it\, U_\lambda v^\lambda \sigma}\, (d_\lambda - o)\, d\sigma}{\int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda,\sigma)\, e^{-it\, U_\lambda v^\lambda}\, \sigma\, d\sigma} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (6)$$

und

$$l_x E = \frac{\varphi'(o)}{i} = \int_0^n d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda,\sigma)\, U_\lambda v^\lambda\, (d_\lambda - \sigma)\, d\sigma = \int_0^n d\lambda \left\{ U_\lambda v^\lambda\, d\lambda - \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda,\sigma)\, U_\lambda v^\lambda\, \sigma\, d\sigma \right\} \quad (7).$$

Dem Aequivalenzprinzip entsprechend ist also E die Einmalprämie einer Todesfallversicherung des x-jährigen.

Wir berechnen nun die zweite Ableitung von $\varphi(t)$.

$$\varphi''(t) = \frac{d}{dt} \left\{ \varphi(t) \int_0^n d\lambda\, \frac{U_\lambda v^\lambda\, i \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda,\sigma)\, e^{-it\, U_\lambda v^\lambda \sigma}\, (d_\lambda - \sigma)\, d\sigma}{\int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda,o)\, e^{-it\, U_\lambda v^\lambda \sigma}\, d\sigma} \right\} \quad . \; . \; . \quad (8)$$

und

$$-\varphi''(o) = E^2 - \int_0^n U_\lambda^2 v^{2\lambda} \left\{ \left[\int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda,\sigma)\, \sigma\, d\sigma \right]^2 - \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda,\sigma)\, \sigma^2\, d\sigma \right\} d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} f(a)\, a^2\, da \quad (9).$$

Formel (7) geht bei $\int\limits_{-\infty}^{\infty} v(\lambda,\sigma)\,\sigma\,d\sigma = 0$, also insbesondere bei in σ symmetrischem $v(\lambda,\sigma)$ in die gewöhnliche Formel für die kurze Todesfallversicherung

$$\int\limits_0^n U_\lambda v^\lambda d_\lambda d\lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7a)$$

über.

Dagegen entspricht der Formel (9) keine übliche Formel, vor allem darf sie nicht mit der Formel für das Risiko verwechselt werden. Sie hat eine andere Bedeutung. Während, wie in der Einleitung erwähnt, die Formel

$$-\int\limits_0^n \frac{dl_{x+t}}{dt}(U_t v^t - E)^2\,dt$$

für das mittlere Risiko Abweichungen vom Verlaufe der Tafelsterblichkeit nicht direkt berücksichtigt, betrachtet unsere Formel gerade die im Endergebnis durch die verschiedenen Abweichungen der Totenzahlen hervorgebrachten Verschiedenheiten der Auszahlungsbarwerte von dem als voraussichtlich berechneten. Sie besagt also z. B. nach dem Satz von Tschebischeff, daß mit einer Wahrscheinlichkeit $> 1 - \frac{1}{\mu^2}$ erwartet werden kann, daß eine Einmalprämie in der Höhe von

$$E + \frac{\mu}{l_x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(a)\,(a-E)^2\,da = E + \frac{\mu}{l_x}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(a)\,a^2\,da - 2E\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(a)\,a\,da + E^2\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(a)\,da\right\}$$

$$= E + \frac{\mu}{l_x}\int\limits_0^n d\lambda\,U_\lambda^2 v^{2\lambda}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} v(\lambda,\sigma)\,\sigma^2\,d\sigma - \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} v(\lambda,\sigma)\,\sigma\,d\sigma\right)^2\right] \quad \ldots (10)$$

zur Deckung aller Auszahlungen ausreicht.

Es soll noch untersucht werden, für welchen Wert von a die Formel (4) ihr Maximum erreicht unter der Voraussetzung, daß $v(\lambda,\sigma)$ in σ gerade ist.

Dann ist

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} v(\lambda,\sigma)\,e^{-it\sigma U_\lambda v^\lambda}\,d\sigma$$

gerade in t, ebenso

$$\int\limits_0^n \lg \int\limits_{-\infty}^{\infty} v(\lambda,\sigma)\,e^{-it\sigma U_\lambda v^\lambda}\,d\sigma\,d\lambda$$

und auch

$$e^{\int\limits_0^n \lg \int\limits_{-\infty}^{\infty} v(\lambda,\sigma)\,e^{-it\sigma U_\lambda v^\lambda} d\sigma\,d\lambda} = e^{\int\limits_0^n \lg \int\limits_{-\infty}^{\infty} v(\lambda,\sigma)\,e^{+it\sigma U_\lambda v^\lambda} d\sigma\,d\lambda} \quad \ldots (11).$$

Die Bedingung für ein Maximum lautet

$$f'(a) = 0$$

oder

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\int\limits_0^n \lg \int\limits_{-\infty}^{\infty} v(\lambda,\sigma)\,e^{it(d_\lambda - \sigma)U_\lambda v^\lambda} d\sigma\,d\lambda}\, e^{-ita}\,t\,dt = 0 \quad \ldots\ldots (12).$$

Dies formen wir um in

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\int\limits_0^n t d_\lambda U_\lambda v^\lambda d\lambda - ita}\; e^{\int\limits_0^n \lg \int\limits_{-\infty}^{\infty} v(\lambda,\sigma)\,e^{-it\sigma U_\lambda v^\lambda} d\sigma\,d\lambda}\, t\,dt = 0 \quad \ldots (13).$$

Diese Gleichung ist wegen (11) sicher erfüllt, wenn der erste Faktor unter dem Integralzeichen gleich eins ist, d. h. für $a = \int\limits_0^n d\lambda\,U_\lambda v^\lambda d_\lambda$.

Unter der Voraussetzung eines geraden $v(\lambda,\sigma)$ für alle λ hat also die sich aus der Tafel ohne Berücksichtigung der Abweichungen ergebende Auszahlungssumme die größte Wahrscheinlichkeit.

3. Die jährliche Prämienzahlung. Wir gehen nun zu jährlicher Prämienzahlung über und nennen $p_\lambda d\lambda$ die Prämie, die der $x + \lambda$-jährige zu zahlen hat.

Vorübergehend führen wir eine Verteilungsfunktion der $z = l_{x+\rho} - \lambda_{x+\rho}$ zur Zeit ϱ ein, die wir mit $w(\varrho, z)$ bezeichnen, wobei $\lambda_{x+\rho}$ die tatsächlich Lebenden sind.

Die mathematische Erwartung aller Prämienzahlungen ist dann analog zu (7)

$$\int_0^n d\varrho \int_{-\infty}^{\infty} w(\varrho, z)\, p_\rho\, v^\rho\, (l_{x+\rho} - z)\, dz \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14).$$

Da die Lebenden $\lambda_{x+\rho}$ gleich sind den l_x weniger den auf der Zeitstrecke 0 bis ϱ Verstorbenen, so ergibt sich analog zu (4)

$$w(\varrho, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\int_0^n \lg \int_{-\infty}^{\infty} v(\mu,\sigma)\, e^{it(d_\mu - \sigma)}\, d\sigma\, d\mu}\; e^{it(l_x - l_{x+\rho} + z)}\, dt \quad . \; . \quad (15)$$

und hieraus analog zu (5) und (7)

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(\varrho, z)\, dz = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(\varrho, z)\, (l_x - l_{x+\rho} + z)\, dz = \int_0^\rho d\mu \int_{-\infty}^{\infty} v(\mu, \sigma)\, (d_\mu - \sigma)\, d\sigma \quad . \; . \; . \; . \quad (17).$$

Setzen wir in (14) den Ausdruck (15) ein, so erhalten wir

$$\int_0^n p_\rho v^\rho l_{x+\rho}\, d\varrho - \int_0^n d\varrho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\int_0^\rho \lg \int_{-\infty}^{\infty} v(\mu,\sigma)\, e^{it(d_\mu - \sigma)}\, d\sigma\, d\mu}\; e^{-it(l_x - l_{x+\rho} + z)}\, p_\rho\, v^\rho\, z\, dt \quad (18).$$

Dies gibt weiter, wenn wir für das letzte z setzen $(l_x - l_{x+\rho} + z) - (l_x - l_{x+\rho})$

$$\int_0^n p_\rho v^\rho l_{x+\rho}\, d\varrho - \int_0^n d\varrho\, p_\rho\, v^\rho \int_{-\infty}^{\infty} w(\varrho, z)(l_x - l_{x+\rho} + z)\, dz + \int_0^n d\varrho\, p_\rho v^\rho (l_x - l_{x+\rho}) \int_{-\infty}^{\infty} w(\varrho, z)\, dz \quad (19).$$

Das ist aber wegen (16) und (17)

$$\int_0^n p_\rho v^\rho l_{x+\rho}\, d\varrho - \int_0^n d\varrho\, p_\rho v^\rho \int_0^\rho d\mu \int_{-\infty}^{\infty} v(\mu, \sigma)\, (d_\mu - \sigma)\, d\sigma + \int_0^n d\varrho\, p_\rho v^\rho (l_x - l_{x+\rho})$$

$$= \int_0^n d\varrho\, p_\rho v^\rho l_x - \int_0^n d\varrho\, p_\rho v^\rho \int_0^\rho d\mu \int_{-\infty}^{\infty} v(\mu, \sigma)\, (d_\mu - \sigma)\, d\sigma \quad . \; . \; . \quad (20).$$

Diese Formel gibt, mit (7) zusammengehalten, das verallgemeinerte Aequivalenzprinzip, das die Gleichheit der mathematischen Erwartungen beider Vertragspartner besagt[1]):

$$\int_0^n d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda, \sigma)\, U_\lambda v^\lambda\, (d_\lambda - \sigma)\, d\sigma = \int_0^n d\varrho\, p_\rho v^\rho l_x - \int_0^n d\varrho\, p_\rho v^\rho \int_0^\rho d\mu \int_{-\infty}^{\infty} v(\mu, \sigma)\, (d_\mu - \sigma)\, d\sigma \quad (21).$$

4. Anhang. Die Wahrscheinlichkeit, daß der auf den Zeitpunkt 0 bezogene Barwert der Auszahlungen auf der Zeitstrecke 0 bis n den Betrag a hat, muß wegen des Multiplikationssatzes unabhängiger Wahrscheinlichkeiten folgender Funktionalgleichung genügen

$$\mathfrak{f}(a; 0, n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(b; 0, m)\, f(a - b, m, n)\, db,$$

[1]) Unter Verwendung des Dirichletschen Satzes erhalten wir noch

$$(\alpha) \int_0^n d\mu \int_\mu^n [p_t v^t \int_{-\infty}^{\infty} v(\mu, \sigma)\, (d_\mu - \sigma)\, d\sigma]\, dt = \int_0^n dt \int_0^t [p_t v^t \int_{-\infty}^{\infty} v(\mu, \sigma)\, (d_\mu - \sigma)\, d\sigma]\, d\mu$$

und daraus (statt t tritt hier der Parameter ϱ ein)

$$(\beta) \int_0^n d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda\varrho)\, U_\lambda v^\lambda\, (d_\lambda - \sigma)\, d\sigma = l_x \int_0^n d\varrho\, p_\rho v^\rho - \int_0^n dt\, \left\{[d_t - \int_{-\infty}^{\infty} v(t\sigma)\, \sigma\, d\sigma] \int_t^n p_\mu v^\mu\, d\mu\right\}.$$

Vgl. hierzu 6) Formel (8).

[6]) Vajda, Ueber das Aequivalenzprinzip, Zeitschr. f. d. gesamte Versicherungswissenschaft 1929. Heft 2, Beiblätter für Versicherungsmathematik.

in der m ein beliebiger Zeitpunkt auf obiger Zeitstrecke ist. Wir zeigen, daß unsere Funktion (4) diese Bedingung tatsächlich erfüllt. Es ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\int_0^n \lg \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda,\sigma)\, e^{it(d_\lambda-\sigma)U_\lambda v^\lambda}\, d\sigma\, d\lambda}\, e^{-ita}\, dt$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} db \int_{-\infty}^{\infty} e^{\int_0^m \lg \int_{\infty}^{\infty} v e^{it(d_\lambda-\sigma)U_\lambda v^\lambda}\, d\sigma\, d\lambda}\, e^{-itb}\, dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{\int_m^n \lg \int_{-\infty}^{\infty} v e^{i\bar t(d^\lambda-\sigma)U_\lambda v^\lambda}\, d\sigma\, d\lambda}\, e^{-i\bar t(a-b)}\, d\bar t$$

zu beweisen.

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} db \int_{-\infty}^{\infty} e^{\int_0^m \lg \int_{-\infty}^{\infty} v e^{it(d-\sigma)Uv^\lambda}\, d\sigma\, d\lambda}\, e^{-itb}\, dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{\int_m^n \lg \int_{-\infty}^{\infty} v e^{i\bar t(d-\sigma)Uv^\lambda}\, d\sigma\, d\lambda}\, e^{-i\bar t(a-b)}\, d\bar t$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} db \int_{-\infty}^{\infty} e^{\int_0^m \lg \int_{-\infty}^{\infty} v e^{it(d-\sigma)Uv^\lambda}\, d\sigma\, d\lambda + \int_m^n \lg \int_{-\infty}^{\infty} v e^{it(d-\sigma)Uv^\lambda}\, d\sigma\, d\lambda}\, e^{-i\bar t a}\, e^{-ib(t-\bar t)}\, d\bar t.$$

Wenden wir auf

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} db \int_{-\infty}^{\infty} e^{\int_0^m \lg \int_{-\infty}^{\infty} (t)\ldots + \int_m^n \lg \int_{-\infty}^{\infty} (\bar t)\ldots}\, e^{-i\bar t a}\, e^{-ib(t-\bar t)}\, d\bar t$$

das Fouriersche Umkehrtheorem an, so erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{\int_0^m \lg f(t)\ldots + \int_m^n \lg f(t)\ldots}\, e^{-ita} = f(a;\, 0, n)$$

w. z. b. w.

Bachelier geht in seinem »Calcul des probabilités«, Tome I, Paris 1912, auf Seite 157 von unserer obigen Funktionalgleichung aus. Er kommt aber zum Ergebnis (S. 165), daß die lösende Funktion für den Fall, daß ihr erstes Moment verschwindet, symmetrisch sein muß. Unsere Funktion (4), die im allgemeinen Fall unsymmetrisch ist, zeigt die Unhaltbarkeit seiner Argumentation. 1

KLEINE MITTEILUNGEN

Untersuchung des ebenen Spannungszustandes auf das Netz der Hauptspannungstrajektorien bezogen. Ich will die bekannten Grundgleichungen des ebenen Spannungszustandes ableiten, ohne ein willkürlich gewähltes Koordinatensystem zu benützen, also nur mittels Koordinaten, die sich vom Spannungszustand selbst ergeben. Diese Grundgleichungen sind: zwei Gleichgewichtsbedingungen und die sogenannte Verträglichkeitsbedingung. Die auf das Netz der Hauptspannungstrajektorien bezogenen Gleichgewichtsbedingungen sind schon längere Zeit bekannt und sind auch vielfach verwendet worden. Mein Ziel ist, durch die entsprechende Ableitung der dritten Grundgleichung diese Untersuchungen vollständig zu machen.

Der Spannungszustand einer Scheibe ist bekannt, wenn in jedem Punkte die Hauptspannungsrichtungen 1 und 2 und die Größe der beiden Hauptspannungen σ_1 und σ_2 gegeben sind. Die Hauptspannungsrichtungen können einheitlich durch ihr Trajektoriennetz, die Kurvenscharen 1 und 2 gegeben werden. Wir wählen für jede Kurvenschar eine positive Richtung; dadurch ergeben sich auch für die Tangenten die positiven Richtungen. Die Krümmung einer Trajektorie in einem Punkte wollen wir positiv nennen, wenn der Krümmungsmittelpunkt auf der positiven Halbtangente der durch den Punkt gehenden zweiten Trajektorienlinie liegt. Wir setzen voraus, daß die Spannungen und Formänderungen dem Hookeschen Gesetz folgen, ferner, daß die Formänderungen im Verhältnis zu den Abmessungen der Scheibe klein sind.

Betrachten wir ein unendlich kleines Rechteck mit den Seiten ds_1 und ds_2 (Abb. 1), so ergeben sich ohne weiteres die bekannten Gleichgewichtsbedingungen:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varrho_1} = -\frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} \quad \ldots\ldots (1),$$

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varrho_2} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} \quad \ldots\ldots\ldots (2).\,[1]$$

Abb. 1.

Um die Verträglichkeitsbedingung abzuleiten, wollen wir von den Spannungen zu den Formänderungsgrößen übergehen. Dabei sind die Hauptdehnungslinien mit den Hauptspannungstrajektorien identisch und die Hauptdehnungen in irgendeinem Punkte sind durch die Gleichungen

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\sigma_2}{E\,m} \quad \ldots\ldots (3),$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\sigma_1}{E\,m} \quad \ldots\ldots (4)$$

bestimmt.

Wenn wir zwei Punkte der Scheibe durch eine beliebige in der Scheibe verlaufende Linie verbinden, muß die Resultierende der längs dieser Linie eintreffenden relativen Bewegungen von der Linie selbst unabhängig sein, d. h. sie ist durch den Anfangs- und Endpunkt schon bestimmt. Es ist leicht einzusehen, daß diese Bedingung notwendig und hinreichend für die Möglichkeit des betreffenden Deformationszustandes ist. Offenbar genügt es auch, nur die aus Trajektorienbögen zusammengesetzten Linien zu betrachten.

Längs einer Trajektorie sind folgende relative Bewegungen zu finden: 1. Dehnungen, durch ε_1 bzw. ε_2 unmittelbar gegeben; 2. Verbiegung, d. h. relative Verdrehungen. Die auf die Längeneinheit bezogene relative Verdrehung k_1 längs einer Trajektorenlinie 1 wollen wir positiv nennen, wenn der in der $+s_1$-Richtung folgende Teil sich im Uhrzeigersinne verdreht, auf den vorhergehenden Teil bezogen. Ebenso sei k_2 definiert, für die Trajektorien 2.

Wir betrachten die Formänderung eines unendlich kleinen, von Trajektorienbögen begrenzten Viereckes (Abb. 2). Es genügt dabei, sich auf unendlich kleine Größen zweiter Ordnung in ds_1 und ds_2 zu beschränken.

[1] Diese Gleichungen wurden zuerst von **Maxwell** angegeben; vergl. auch **L. Föppl: Untersuchung ebener Spannungszustände mit Hilfe der Doppelbrechung. Sitzungsberichte d. Bayerischen Akademie d. W., Math.-naturwiss. Abt. 1928.**

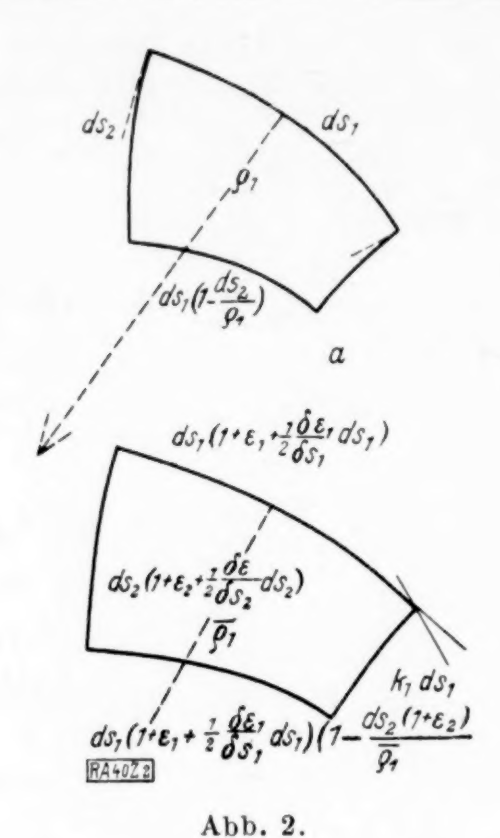


Abb. 2.

Aus der Abbildung folgt:

$$k_1\, ds_1 = \left(\frac{1}{\bar{\varrho}_1} - \frac{1}{\varrho_1}\right) ds_1 + \frac{\varepsilon_1}{\bar{\varrho}_1}\, ds_1$$

oder

$$k_1 = \left(\frac{1}{\bar{\varrho}_1} - \frac{1}{\varrho_1}\right)(1 + \varepsilon_1) + \frac{\varepsilon_1}{\varrho_1} \qquad (5).$$

Nun ist aber

$$ds_1\left(1 - \frac{ds_2}{\varrho_1}\right)\left(1 + \varepsilon_1 + \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial s_2}\, ds_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial s_1}\, ds_1\right) =$$

$$= ds_1\left(1 + \varepsilon_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial s_1}\, ds_1\right)\left(1 - \frac{ds_2\,(1+\varepsilon_2)}{\bar{\varrho}_1}\right).$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial s_2} - \frac{1+\varepsilon_1}{\varrho_1} = -\frac{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)}{\bar{\varrho}_1},$$

$$\frac{1}{\bar{\varrho}_1} - \frac{1}{\varrho_1} = -\left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial s_2} + \frac{\varepsilon_2}{\varrho_1}\right)(1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2),$$

und es ergibt sich:

$$k_1 = -\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial s_2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varrho_1} \quad \ldots\ldots (6).$$

Hierbei sind die Quadrate und Produkte der Dehnungen und ihrer Ableitungen unseren Voraussetzungen gemäß vernachlässigt worden. Ganz ähnlich erhalten wir durch Vertauschung der Richtungen 1 und 2:

$$k_2 = \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial s_1} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varrho_2} \quad \ldots\ldots (7).$$

Setzen wir für ε_1 und ε_2 die Ausdrücke (3) und (4) ein, so wird

$$k_1 = \frac{1}{E}\left(\frac{1}{m}\frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} - \frac{\partial \sigma_1}{\partial s_2}\right) + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varrho_1}\,\frac{m+1}{m\,E},$$

$$k_2 = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial s_1} - \frac{1}{m}\frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1}\right) + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varrho_2}\,\frac{m+1}{m\,E},$$

und mit Berücksichtigung der Gleichgewichtsbedingungen (1) und (2):

$$k_1 = -\frac{1}{E}\,\frac{\partial(\sigma_1 + \sigma_2)}{\partial s_2} \quad \ldots\ldots (8),$$

$$k_2 = \frac{1}{E} \frac{\partial(\sigma_1 + \sigma_2)}{\partial s_1} \quad \ldots . (9).$$

Nun sind uns die längs einer Trajektorie stattfindenden relativen Bewegungen vollständig bekannt, und so wollen wir die schon angegebene, für die Möglichkeit des Spannungs- bzw. Deformationszustandes notwendige und hinreichende Bedingung auswerten. Statt jener benützen wir folgende, der anderen offenbar gleichwertige Bedingung: Die Resultierende der relativen Bewegungen, die längs einer geschlossenen, aus Trajektorienbögen zusammengesetzten Linie stattfinden, muß gleich Null sein.

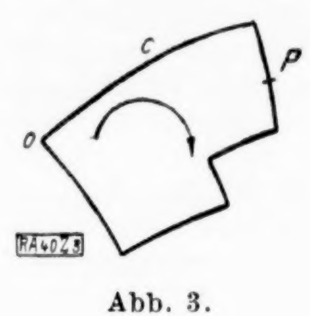


Abb. 3.

Formelmäßig ausgedrückt (Abb. 3):

$$\int_C (k_1\, ds_1 + k_2\, ds_2) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

und

$$\int_C (\varepsilon_1 \overline{ds_1} + \varepsilon_2 \overline{ds_2} + [\overline{OP} \times \overline{k_1\, ds_1}] + + [\overline{OP} \times \overline{k_2\, ds_2}]) = 0 \quad \ldots\ldots (11),$$

wobei die oben gestrichenen Größen Vektoren bedeuten; $\overline{k\,ds}$ ist senkrecht zu Grundebene gedacht; das Zeichen $\int$ bedeutet die Bildung der Resultierenden. Die Vektorengleichung (11) kann offenbar auch durch zwei Skalargleichungen ausgedrückt werden.

Nun läßt es sich unschwer beweisen, daß, wenn die Gleichung (10) identisch erfüllt ist, die Bedingung (11) nur die bereits bekannten Werte (6) und (7) für k_1 und k_2 liefert.

Bei der Auswertung der Gleichung (10) können wir uns auf unendlich kleine Vierecke beschränken (Abb. 4), da jedes beliebige Integral $\int_C$ als Summe solcher Teilintegrale aufgefaßt werden kann. Dabei genügt es, sich auf

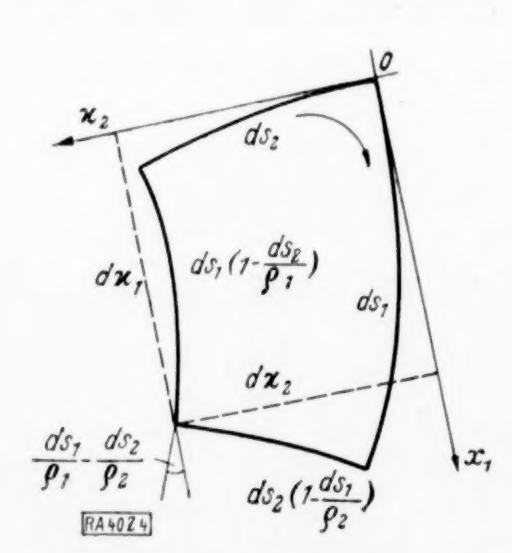


Abb. 4.

unendlich kleine Größen zweiter Ordnung in ds_1 und ds_2 zu beschränken.

Die Summe der relativen Verdrehungen wird so:

$$ds_1\left(k_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial k_1}{\partial s_1} ds_1\right) + ds_2\left(1 - \frac{ds_1}{\varrho_2}\right)\left(k_2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial k_2}{\partial s_2} ds_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial k_2}{\partial s_2} ds_2\right) - ds_1\left(1 - \frac{ds_2}{\varrho_1}\right)\left(k_1 + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial k_1}{\partial s_1} ds_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial k_1}{\partial s_1} ds_1\right) - ds_2\left(k_2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial k_2}{\partial s_2} ds_2\right) = 0.$$

Daraus folgt:

$$\frac{k_1}{\varrho_1} - \frac{\partial k_1}{\partial s_2} - \left(\frac{k_2}{\varrho_2} - \frac{\partial k_2}{\partial s_1}\right) = 0 \quad (12).$$

Die Formeln (8) und (9) eingesetzt:

$$\left[\frac{\partial}{\partial s_1}\frac{\partial(\sigma_1+\sigma_2)}{\partial s_1} - \frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial(\sigma_1+\sigma_2)}{\partial s_2}\right] +$$
$$+ \left[\frac{\partial}{\partial s_2}\frac{\partial(\sigma_1+\sigma_2)}{\partial s_2} - \frac{1}{\varrho_2}\frac{\partial(\sigma_1+\sigma_2)}{\partial s_1}\right] = 0.$$

Wenn aber $F(x_1, x_2)$ eine zweimal differenzierbare Funktion bedeutet, so ist bekanntlich

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s_1^2} - \frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial F}{\partial s_2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}$$

und

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s_2^2} - \frac{1}{\varrho_2}\frac{\partial F}{\partial s_1} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}.$$

Damit erhalten wir die bekannte Verträglichkeitsbedingung für den ebenen Spannungszustand:

$$\frac{\partial^2(\sigma_1+\sigma_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(\sigma_1+\sigma_2)}{\partial x_2^2} = 0$$

oder

$$\Delta(\sigma_1 + \sigma_2) = 0 \text{ [2]} \quad \ldots\ldots (13).$$

Die Gleichungen (1), (2) und (13) sind die gesuchten Grundgleichungen.

Aus unserer Ableitung ist auch ersichtlich, daß, wenn die Gleichgewichtsbedingungen (1) und (2) erfüllt sind, die Verträglichkeitsgleichung (13) durch die Bedingung (10) ersetzt werden darf, die geometrisch viel anschaulicher und auch graphisch leichter verfolgbar ist. Dadurch erhalten wir z. B. eine wertvolle Kontrolle für die Richtigkeit des auf optischem Wege ermittelten Spannungszustandes. Bei dieser Methode werden nämlich die Gleichgewichtsbedingungen ausgenützt, die Verträglichkeitsbedingung dagegen nicht. Wenn wir es also zahlenmäßig überprüfen, ob die Bedingung (10) für eine Reihe von Trajektorienrechtecken erfüllt ist, erhalten wir dadurch eine praktisch vollständige Kontrolle [3]).

[2]) Bezüglich der sonst üblichen Ableitung mittels kartesischer Koordinaten siehe z. B.: A. Föppl, Vorlesungen über Technische Mechanik Bd. 5.

[3]) Man kann auch statt Trajektorienrechtecken ganz beliebige geschlossene Linien betrachten. Dann muß $\int_C k\, ds = 0$ sein, $k = \frac{1}{E}\frac{\partial(\sigma_1+\sigma_2)}{\partial n}$, wobei n die linksseitige Normale von C ist; eine

Bezeichnet K/E die relative Verdrehung der Hauptspannungsrichtungen eines veränderlichen Punktes P, bezogen auf einen festen Punkt 0, so ist offenbar

$$\frac{\partial K}{\partial s_1} = \frac{\partial K}{\partial x_1} = E k_1 = -\frac{\partial(\sigma_1+\sigma_2)}{\partial s_2} = -\frac{\partial(\sigma_1+\sigma_2)}{\partial x_2} \quad \ldots \quad (14),$$

und

$$\frac{\partial K}{\partial s_2} = \frac{\partial K}{\partial x_2} = E k_2 = \frac{\partial(\sigma_1+\sigma_2)}{\partial s_1} = \frac{\partial(\sigma_1+\sigma_2)}{\partial x_1} \quad (15).$$

Aus diesen Gleichungen kann auch auf (13) gefolgert werden. Außerdem ist daraus ersichtlich, daß K die konjungierte Funktion von $(\sigma_1 + \sigma_2)$ ist[4]), und es wird

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 K}{\partial x_2^2} = \Delta K = 0.$$

Wenn also die Verdrehungen längs des Randes der Scheibe z. B. durch unmittelbare Messung bekannt sind[5]), erhalten wir die Funktion K durch Lösung einer Randwertaufgbe, z. B. nach der Rungeschen graphischen Methode. Ihre konjugierte Funktion ergibt dann $\sigma_1 + \sigma_2$. Ist dazu noch das auf optischem Wege ermittelbare Trajektoriennetz und der Spannungszustand in einem einzigen Punkte bekannt, so kann mittels der Gleichungen (1) und (2) der ganze Spannungszustand bestimmt werden. Führen wir die Bezeichnung $\sigma_1 + \sigma_2 = p$ ein, so wird (Abb. 5)

$$d_1 \sigma_1 = (2\sigma_1 - p)\, \varepsilon \operatorname{cotg} \psi \quad \ldots \quad (16),$$

$$d_2 \sigma_2 = (2\sigma_2 - p)\, \varepsilon \operatorname{tg} \psi \;{}^{6)} \quad \ldots \quad (17).$$

Beziehung, die ganz allgemein aus (13) folgt. — Bei der optischen Methode müssen aber zur Berechnung der Spannungen die $d\sigma$ längs der Trajektorien ermittelt werden, so daß die Anwendung der allgemeinen Beziehung auf die Trajektorienrechtecke am vorteilhaftesten ist.

[4]) Dieses Resultat ist auch bekannt; siehe A. und L. Föppl, Drang und Zwang, § 43.

[5]) Wenn bei der Belastung keine Reibungskräfte auftreten, ist der Rand eine Hauptspannungslinie.

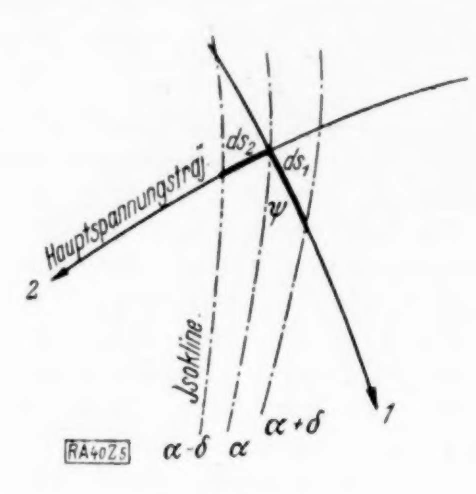


Abb. 5.

Die Richtigkeit des so ermittelten Spannungszustandes kann durch optische Messung von $\sigma_1 - \sigma_2$ an einzelnen Punkten überprüft werden.

Allerdings hängt die Brauchbarkeit dieser Methode ganz davon ab, ob es gelingt, die Verdrehungen der Tangenten des Umrisses mit entsprechender Genauigkeit zu messen[7]).

Budapest. R. Fuchs. 40

[6]) Für die nähere Begründung vergl. die in Anmerkung 1 erwähnte Abhandlung von L. Föppl.

[7]) Eine andere Möglichkeit wäre, aus den bekannten Belastungen und dem Spannungszustand eines Randpunktes mittels der Gleichgewichtsbedingungen (1) die Spannungen und damit auch $(\sigma_1 + \sigma_2)$ längs des Umrisses zu ermitteln. Etwaige Ungenauigkeiten können dabei z. B. durch optische Messung von $(\sigma_1 - \sigma_2)$ an einzelnen Kontrollpunkten beseitigt werden. Das Fehlen von Reibungskräften müssen wir auch hier voraussetzen. — Der verhältnismäßig große Aufwand an Arbeit, den das Rungesche Verfahren erfordert, macht aber den praktischen Wert beider Methoden sehr problematisch.

Während der Drucklegung des Aufsatzes ist es mir gelungen, die Verträglichkeitsbedingungen für den achsensymmetrischen und auch für den allgemeinen räumlichen Spannungszustand auf ähnlichem geometrischen Wege in allgemeinen krummlinigen Koordinaten abzuleiten.

BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die VDI-Buchhandlung, Berlin NW 7, Ingenieurhaus, zu beziehen.)

Dr. ALFRED **LOTZE,** Privatdozent für Mathematik an der Technischen Hochschule Stuttgart. Punkt- und Vektorrechnung. Mit 7 Figuren. Göschens Lehrbücherei 1. Gruppe Bd. 13. Verlag Walter de Gruyter, Berlin und Leipzig 1929. 192 S. Preis geh. 12 M, geb. 13 M.

Gerade in den letzten Jahren sind einige, teils sehr gute Lehrbücher der Vektorrechnung erschienen. Das vorliegende Buch stellt sich im Gegensatz zu den meist üblichen Darstellungen auf den Graßmannschen Standpunkt, welcher auch heute noch aals besonders umfassend bezeichnet werden kann und den Zusammenhang mit der übrigen Mathematik deutlich macht. Jedenfalls ist die interessante, nicht immer ganz einfache Darstellung wertvoll für jeden, dem die Vektorrechnung mehr als ein praktisches Hilfsmittel ist.

Berlin. H. Pollaczek-Geiringer 71

Dr. RICHARD **GANS,** o. ö. Professor der Theoretischen Physik an der Universität Königsberg. Vektoranalysis mit Anwendungen auf Physik und Technik. Mit 40 Figuren im Text. Teubners Mathematische Leitfäden. Bd. 16. Verlag B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1929. VIII + 111 S. Preis 00 M.

Das Büchlein, das hier in sechster Auflage erscheint, ist ja bekanntlich recht unbeschwert

von theoretischen Skrupeln, aber, wie die Tatsache der Auflagenziffern beweist, ein willkommener Berater des Praktikers.

Berlin. H. Pollaczek-Geiringer 71

Dr. SIEGFRIED **VALENTINER,** Professor für Physik an der Bergakademie Clausthal. Vektoranalysis. Mit 13 Fig. Vierte, wenig veränderte Auflage. Sammlung Göschen Nr. 354. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1929. 136 S. Preis 1,50 M.

Stellt jedenfalls von den bisher vorhandenen kurzen Darstellungen des Gegenstandes die einwandfreieste dar und kann als kleine Formelsammlung und zu einer ersten Einführung stets empfohlen werden.

Berlin. H. Pollaczek-Geiringer 71

FELIX **KLEIN,** Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Dritte Auflage. Dritter Band: Präzisions- und Approximationsmathematik. Ausgearbeitet von C. H. Müller. Für den Druck fertig gemacht und mit Zusätzen versehen von Fr. Seyfarth. Mit 156 Abb. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Bd. XVI. Julius Springer, Berlin 1928. X + 338 S. Preis 13,50 M, geb. 15 M.

Unter dem neuen Titel »Präzisions- und Approximationsmethematik« erscheint zum ersten Mal in Buchform die unter dem Namen »Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. (Eine Revision der Prinzipien)« als Autographie bekannte Vorlesung. — So wertvoll und interessant der Kleinsche Begriff der »Approximationsmathematik« vom theoretischen Standpunkt sein mag und so wichtig, besonders für die Zeit des Erscheinens der Vorlesungen, das Betonen der dort aufgestellten Prinzipien war, so wollen wir doch feststellen, daß es nicht etwa so ist, als ob die angewandte Mathematik sich vorwiegend der Approximationsmathematik bediene, während die Präzisionsmathematik das Gebiet des reinen Mathematikers wäre. Wenigstens gilt dies für viele Teile der Approximationsmathematik. So ist die Idee des »Funktionsstreifens« an Stelle der »idealen Kurve« offenbar ein viel komplizierterer Begriff, wie es auch aus dem Kleinschen Buche hervorgeht, dessen Benutzung dem »angewandten Mathematiker« ferne liegt. Anderseits sind Aufgaben der Interpolation, mechanischen Quadratur usw. ein wichtiges Werkzeug zur Behandlung der Anwendungen, bieten aber ebenso ein Arbeitsfeld der reinen Mathematik. — Man darf vielleicht sagen, daß manche spezifische Begriffe der Approximationsmathematik uns heute entbehrlich scheinen, daß aber anderseits für vieles, was F. Klein unter diesem Gesichtspunkt behandelt (Angenäherte Darstellung von Funktionen, Interpolation, Harmonische Analyse usw.), das Ziel erreicht ist, das der Verfasser selbst in der Vorrede erwähnt. »... Hier will sich die folgende Darstellung als eine Ergänzung einschieben; ihr bestes Ziel wird erreicht sein, wenn sie sich eines Tages als überflüssig erweisen sollte, weil die Ueberlegungen, die sie bringt, zu selbstverständlichen Bestandteilen jedes höheren mathematischen Unterrichts geworden sind.«

Berlin. H. Pollaczek-Geiringer 71

F. F. P. **BISACRE** O. B. E., M. A. (Cantab.), B. SC. (Lond.) A. M. Inst. C. E. Praktische Infinitesimalrechnung. Berechtigte deutsche Ausgabe unter Mitwirkung von Prof. Dr. E. Trefftz-Dresden, herausgegeben von Dr. phil. Ernst König in Elberfeld. Mit 104 Abb. und 5 Bildnistafeln. Verlag B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1929. XI + 364 S. Preis 18 M.

Das Buch, dessen durch H. König durchgeführte Uebersetzung H. Trefftz angeregt hat, will eine für Ingenieure und Studenten der Naturwissenschaften geeignete Einführung in die Infinitesimalrechnung geben. Nach Ziel und Einstellung wäre vielleicht ein Vergleich mit dem bekannten ausgezeichneten Buche von Nernst-Schönfließ statthaft. Strenge der Beweise im Sinne der modernen Anforderungen wird nicht angestrebt; aber der Leser erfährt und lernt eine Fülle des mathematisch Wissenswerten, dargebracht in lebendiger oft geistreicher Form, erläutert an ungekünstelt herangezogenen Anwendungsbeispielen, die das Interesse hervorrufen, ohne durch zu große dem Mathematischen fremde Schwierigkeiten die Aufmerksamkeit abzulenken. Im ganzen ein erfrischendes gutes — sorgfältig übersetztes — Buch, dem wir noch besondern Dank wissen für manch hübsche historische Bemerkung, sowie für die interessanten Photographien der großen Mathematiker, Philosophen, Physiker und Chemiker, auf deren Leistungen wir heute aufbauen.

Berlin. H. Pollaczek-Geiringer 71

Dr.-Ing. P. **WERKMEISTER,** ord Professor an der Technischen Hochschule in Dresden. Praktisches Zahlenrechnen. Mit 60 Figuren. Zweite verbesserte Auflage. Sammlung Göschen Nr. 405. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1929. 136 S. Preis 1,50 M.

Das zu einer allerersten Einführung in die Elemente des numerischen und graphischen Rechnens geeignete Büchlein ist in zweiter Auflage erscheinen. Gut verwendbar scheinen mir vor allem die Ausführungen über angenähertes Zahlenrechnen.

Berlin. H. Pollaczek-Geiringer 71

E. **FICK,** Oberstudienrat. Aufgabensammlung über Differentialgleichungen. Verlag Oldenbourg, München und Berlin 1930. VI + 177 S. Preis geh. 6,50 M.

Für die Lösung gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen stellt das vorliegende Buch vielseitiges und sehr brauchbares Uebungsmaterial bereit, welches dem Studierenden, der die Lösung praktischer Beispiele durch Uebung

erlernen will, gewiß willkommen sein wird. Besonders verwendbar wird das Buch durch die ausführlichen Lösungen, in denen auch die Quadraturen, soweit möglich, voll ausgeführt sind.

Berlin. H. Pollaczek-Geiringer 71

G. **de MARCHI,** Professor an der Technischen Hochschule Mailand. Idraulica. Bd. I. Mit 227 Abb. und 2 Tafeln. Verlag Ulrico Hoepli, Mailand 1930. Preis 80 Lire.

G. de Marchi schafft durch dieses Werk ein zwar etwas breit angelegtes, aber brauchbares und leicht verständliches Lehrbuch der Strömungslehre, das insbesondere für den italienischen Ingenieur bestimmt ist, dem allerdings auch noch eine Anzahl anderer italienischer Werke über dieses Gebiet zur Verfügung stehen.

Dem ersten Band, der bisher vorliegt, ist eine Einleitung vorangestellt, die kurz über die physikalischen Eigenschaften der Flüssigkeiten, insbesondere des Wassers, über den Begriff der laminaren und turbulenten Strömung und die spezifischen Begriffsbestimmungen der Hydraulik berichtet. In acht Kapiteln wird folgender Stoff behandelt: I. Fundamente, II. Hydrostatik, III. Bewegung zäher Flüssigkeit im allgemeinen und die Aehnlichkeitsgesetze, IV. Stationäre und nichtstationäre Bewegungen in Rohrleitungen und die Mittel der Mengenmessung, V. Bewegung in Flußläufen und Kanälen, VI. Ausfluß und Ueberfall, VII. Grundlagen der Turbinentheorie, VIII. Grundwasserbewegung.

Im wesentlichen behandelt das Werk die Strömungen nur eindimensional, so daß an die Vorbildung des Lesers nur äußerst geringe Anforderungen gestellt werden. Das Abbildungsmaterial ist außerordentlich reichhaltig und wirkt sehr instruktiv. Besonders lehrreich sind die gut ausgewählten numerischen Beispiele. Die Literaturangaben am Schluß der einzelnen Kapitel und Abschnitte sind sehr reichhaltig und eröffnen durch ergänzende Bemerkungen leicht den Weg zu weiteren Studien.

Nur die Abb. 62, 63, 65 entsprechen nicht ganz den Anforderungen der neueren Strömungslehre, da sie in der Zone des Druckanstiegs zu der irreführenden Annahme von ruhender Flüssigkeit verleiten. Besser wäre die Andeutung der dort vorhandenen »Luv«-wirbel. Entsprechendes gilt für die Zone der Einschnürung. Dort wären unter Beibehaltung der Strahlgrenzen »Lee«wirbel anzudeuten.

Berlin. F. Weinig. 74

Dr. A. **FLECHSENHAAR,** Oberstudienrat in Frankfurt a. M. Einführung in die Finanzmathematik. Ergänzungsheft B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1929. VI + 57 S. Preis kart. 2 M.

Enthält im Stil eines Mittelschullehrbuchs das wichtigste über Funktionen, Einführung in die Differentialrechnung, die unendlichen Reihen, die lineare Interpolation und die regula falsi samt numerischen Beispielen zur Vorbereitung auf die Ersatzreifeprüfung.

Heidelberg. E. J. Gumbel. 79

Prof. LOTHAR **HEFFTER,** Professor an der Universität Freiburg. Nichteuklidische Geometrie der Ebene und des Raumes. Mit 14 Fig. im Text. Lehrbuch der analytischen Geometrie. Grundlagen, Projektive, Euklidische, Nichteuklidische Geometrie. Bd. III. Verlag G. Braun, Karlsruhe 1929. VIII + 71 S.

Das Büchlein setzt bei dem Leser die gründliche Kenntnis der beiden ersten (umfangreicheren) Bände voraus, in denen die grundsätzlichen Fragen schon erörtert wurden. Daher gelingt es dem Verfasser, in diesem dritten und abschließenden Bande auf nur etwa 70 Seiten einen sehr exakten Ueberblick über die elliptische und hyperbolische Geometrie zu geben.

Stuttgart. Fr. Rehbock. 73

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

STEFAN **BANACH** und HUGO **STEINHAUS.** Studia Mathematica, Tom I. Wydano Z Subwencji Ministerstwa, Lwow 1929. 255 S.

JUL. **HARTMANN,** The Jet-Wave, Theory of the Periodic Jet-Wave. Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Mathematisk-fysiske Meddelser. IX, 2. Verl. Andr. Fred. Host & Son. Kopenhagen 1929. 101 S. — The Jet-Chain-and the Jet-Wave-Vibrator. Dass. Bd. IX, 4. 67 S.

Dr. HANS **PETER,** Privatdozent an der Universität Tübingen. Grenzen der Statistik in der Konjunkturforschung. Ein Beitrag zur Kritik der Wirtschaftsprognose. Veröffentlichungen der Frankfurter Gesellschaft für Konjunkturforschung, herausgegeben von Dr. Eugen Altschul. Heft 5. 73 S. Verlag Kurt Schroeder, Berlin 1930.

Rendiconto del Seminario Matematico e Fisico di Milano. Bd. III (1929 — VII). Libreria Editrice Politecnica. Milano 1930. XV + 267 S.

Dr. LUDWIG **BIEBERBACH,** o. ö. Professor an der Friedrich-Wilhelm-Universität in Berlin. Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften. Lehrbuch der Funktionentheorie. Bd. I. Elemente der Funktionentheorie. Dritte erbesserte Auflage. Mit 80 Figuren im Text. Verlag B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1930. Preis geb. 17 M.

WESTRICK – HEINE – BRAUN, Rechenbuch für höhere und mittlere Lehranstalten. Ausgabe C für Mitteldeutschland. Aschendorffsche Verlagsbuchhandlung, Münster i. W. 1930. 290 S. Anhang 36 S. Preis 3,80 M.

RICHARD **POTTHOF,** Oberstudiendirektor in Wanne-Eickel. Die anschauliche Natur der geometrischen Grundbegriffe. Aschendorffsche Verlagsbuchhandlung, Münster i. M. 1930, 27 S. Preis 1 M.

Dr.-Ing. THEODOR **PÖSCHL,** o. Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe. Lehrbuch der Technischen Mechanik für Ingenieure und Physiker. Zum Gebrauche bei Vorlesungen und zum Selbststudium. Zweite vollständig umgearbeite Auflage. Mit 249 Textabb. Springer, Berlin 1930. VIII + 318 S. Preis 17,50 M, geb. 19 M.

RICHARD **DEDEKIND.** Gesammelte mathematische Werke. Herausgegeben von Robert Fricke in Braunschweig, Emmy Noether in Göttingen, Oeystein Ore in New Haven. Erster Band. Mit einem Bildnis Dedekinds. Verlag Vieweg & Sohn, Braunschweig 1930. 397 S. Preis geh. 30 M, geb. 32,50 M.

Dr. C. **WIARDA,** a. o. Professor an der Techn. Hochschule Dresden. Integralgleichungen unter besanderer Berücksichtigung der Anwendungen. Mit 8 Figuren im Text. Samml. Mathem. Physik. Lehrbücher Nr. 25. Verlag B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1930. 183 S. Preis geb. 9,60 M.

Dr.-Ing. RUDOLF **KIRCHHOFF,** Regierungsbaumeister. Die Statistik der Bauwerke. Zweiter Band: Formänderungen statisch bestimmter ebener Fachwerk- und Vollwandträger. — Allgemeine Theorie der statisch unbestimmten Fachwerk- und Vollwandträger. Zweite neubearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 261 zum Teil farbigen Textabb. Verlag Wilhelm Ernst & Sohn. IX + 368 S. Preis geh. 35 M, geb. 27 M.

R. **HERMANN** und TH. **BURBACH,** Strömungswiderstand und Wärmeübergang in Rohren. Mit einem einführenden Vorwort von L. Schiller, Prof. a. d. Universität Leipzig. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1930. IV + 88 S. Preis 7,80 M.

Grundzüge der Getriebelehre. Auf Anregung des Ausschusses für wirtschaftliche Fertigung dargestellt von Dipl.-Ing. Dr. WILLY **JAHR** und Dipl.-Ing. PAUL **KNECHTEL,** Bauräten an der Höheren Maschinenbauschule der Stadt Leipzig. Erster Band: Allgemeine Grundlagen — Schraubengetriebe — Kurbelgetriebe. Mit rund 400 Abb. Verlag Dr. Max Jänicke, Leipzig 1930. XV + 402 S. Preis 19,20 M.

Dr. H. **WIELEITNER,** Oberstudiendirektor und Privatdozent in München. Algebraische Kurven. Neue Bearbeitung. Erster Teil. Gestaltliche Verhältnisse. Mit 97 Figuren. Durchgesehener Neudruck. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1930. Samml. Göschen Nr. 435. 146 S. Preis 1,80 M.

Dr. L. **FÖPPL,** o. Professor a. d. Techn. Hochschule München. Aufgaben aus technischer Mechanik. Statik, Festigkeitslehre, Dynamik. Verlag R. Oldenbourg, München und Berlin 1930. VII + 188 S. Preis geb. 15 M.

Dipl.-Ing. ERNST **PRAETORIUS,** Berlin. Wärmewirtschaft im Kesselhaus. Mit 151 Abb. Wärmelehre und Wärmewirtschaft in Einzeldarstellungen. Bd. VIII. Verlag Theodor SSteinkopff, Dresden und Leipzig 1930. XXVII + 428 S. Preis geh. 30 M, geb. 31,50 M.

R. **COURANT,** o. Professor an der Universität Göttingen. Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Erster Band. Funktionen einer Veränderlichen. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 126 Textfiguren. Verlag Springer, Berlin 1930. XIV + 410 S. Preis geb. 18,60 M. — Eine durchgesehene, von Druckfehlern und kleinen Irrtümern befreite neue Auflage des Bd. 8, S. 154 besprochenen Buches.

NACHRICHTEN

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Ortsgruppe Berlin.

Am 16. Mai sprach in der Technischen Hochschule Hr. Prof. Dr.-Ing. G. Schnadel-Berlin über »Ueberschreitung der Knickgrenze bei dünnen Platten«.

Am 20. Juni sprach Hr. Prof. Dr. K. Popoff-Sofia über das ballistische Problem bei beliebigem Widerstand und Berücksichtigung der Luftdruckabnahme mit der Höhe.

Am 18. Juli wird Hr. G. Weinblum-Berlin über die Michellsche Theorie des Schiffswiderstandes sprechen.

Weltkraftkonferenz. In der Zeit vom 15. bis 26. Juni findet in Berlin die zweite Weltkraftkonferenz statt, auf der mehrere hundert Vorträge über die verschiedensten Gebiete der technischen Wissenschaften von Vertretern aller Kulturländer gehalten werden. Die Verhandlungen zerfallen in 34 Sektionen, die hauptsächlich der Elektrizitäts-, Wasser- und Dampfwirtschaft sowie den hauptsächlichsten Fragen der Verkehrstechnik gewidmet sind.

Sektion 32, deren Generalberichterstatter Prof. Föttinger ist, führt den Titel »Forschungsarbeiten«. Unter den hier angekündigten 14 Vorträgen seien die der Hydraulik gewidmeten angeführt: A. Strickler (Schweiz) »Die Frage des Koeffizienten in der Formel von Chézy«; R. Ehrenberger (Oesterreich) »Eine neue Geschwindigkeitsformel für künstliche Gerinne mit starken Neigungen«; J. Aastadt und R. Søgnen (Norwegen) »Eine neue Methode zur Bestimmung der Abflußmengen in natürlichen und künstlichen Wasserläufen«; V. R. Sectorov (Rußland) »Die Arbeiten des Zentralen Aero-Hydrodynamischen Instituts auf dem Gebiete der Ausnutzung der Windenergie in der U. S. S. R.«

Sektion 33 (Generalberichterstatter Dr.-Ing. Neuhaus und Dr. Leisse) beschäftigt sich mit »Normungsproblem und Methodik der Statistik«. Folgende Vorträge sind der Statistik gewidmet: P. Vinding (Dänemark) »Ueber die Bearbeitung von elektrizitätswerkstatisti-

schem Material«; E. Velander (Schweden) »Das Stufendiagramm als Hilfsmittel bei statistischen Untersuchungen«; M. Alexander (U. S. A.) »World Power Statistics«; P. Ryan und W. M. Carpenter (U. S. A.) »Methods of Collection of Power and Gas Statistics in the U. S. A.«.

In Sektion 34, die den Fragen der »Ausbildung« gewidmet ist (Generalberichterstatter Prof. Lohse) spricht u. a. C. Matschoß (Deutschland) über »Technische Erziehung in Deutschland«; P. Ossadtschy (Rußland) über »Die elektrotechnische Bildung in der U. S. S. R.«. 80

Sämtliche Berichte sind in Druck gelegt und einzeln durch den VDI-Verlag zu beziehen.

Schwingungstagung Berlin 1930. Eine Tagung des Ausschusses für mechanische Schwingungen im Verein deutscher Ingenieure fand am 10. März 1930 zu Berlin statt. Dr. J. Geiger, Augsburg, behandelte die Biegungsschwingungen der unbeweglichen Teile stehender Oelmotoren, die unter dem Einfluß der Gleitbahn-Reaktionen Schwingungen senkrecht zur Maschinenlängsebene ausführen können.

Mit den Schwingungen von Kurbelwellen, besonders mit den dabei auftretenden Beanspruchungen, beschäftigte sich eine Mitteilung von Prof. Dr. W. Hort, die der Frage gewidmet war, inwieweit man mit den heutigen Mitteln derartige Beanspruchungen vorausberechnen kann, wenn die Konstruktionszeichnungen der Maschine vorliegen.

Der experimentellen Bestimmung der Dauerfestigkeit war der Vortrag von Prof. K. Memmler, Berlin-Dahlem: Untersuchung von Metallen auf Dauerfestigkeit, gewidmet. Mit der gleichen Aufgabe beschäftigte sich der Vortrag von Reichsbahnoberrat Dr. Kühnel, allerdings unter Verwendung anderer Prüfmaschinen.

Der Frage der Dauerfestigkeit widmete sich der Vortrag von Prof. Dr. Esau, Jena, über neuere Ergebnisse der dynamischen Materialforschung. Der Vortrag von Dr. E. Meyer, Berlin: Messung und Begutachtung von Schallisolierstoffen wandte sich dem bauakustischen Gebiet zu. Gleichfalls in das Gebiet der bautechnischen Schwingungen, und zwar der »langsamen«, führte der Vortrag von Privatdozent Dr. H. Reiher, Stuttgart, »Schwingungserscheinungen an Gebäuden«. 80

Dritter Internationaler Kongreß für Technische Mechanik, Stockholm. Für den in der Zeit vom 24. bis 29. August 1930 stattfindenden Kongreß sind 447 Personen zur Teilnahme angemeldet. Von den 184 Vorträgen sollen einige, ohne verlesen zu werden, nur in dem Verhandlungsbericht gedruckt erscheinen.

Zu den in Heft 2 genannten allgemeinen Vorträgen kommen noch folgende hinzu:

Vicomte R. d'Adhémar, Lambersart: Étude du mouvement pendulaire d'un projectile tournant.

J. W. Geckeler, Jena: Ueber die Elastizitätstheorie.

Auf Grund der vielen Vortragsanmeldungen hat das Organisationskomitee sich genötigt gesehen, die im Zirkular I genannte Sektion III in zwei selbständige Sektionen zu teilen, so daß folgende Einteilung besteht:

Sektion I: Hydro- und Aerodynamik.

Sektion II: Elastizität. Plastizität und Festigkeit.

Sektion III: Stabilitäts- und Schwnigungsprobleme und Raumakustik.

Sektion IV: Rationelle Mechanik und Ballistik.

Die Vorträge verteilen sich der Zahl nach wie folgt: Sekt. I 41, Sekt. II 45, Sekt. III 42, Sekt. IV 41.

Die Vorträge finden am Montag den 25. August 10—12, 14—16^{30} statt, am Dienstag, Mittwoch und Donnerstag 9—12, 14—14^{30} und Freitag 9—12.

Für die Sektionsvorträge ist eine Zeit von je 30 Minuten vorgesehen, davon 10—15 Minuten für die Aussprache, ebenso wie es in Zürich 1926 gehandhabt wurde. Außerdem ist täglich auch die Zeit zwischen 16^{30}—17^{30} für Diskussionen vorbehalten.

Persönliches. Als Privatdozent bei der Fakultät für Allgemeine Wissenschaften der Technischen Hochschule Aachen haben sich habilitiert: Dr.-Ing. F. N. Scheubel für das Lehrgebiet »Mechanik, insbesondere Aerodynamik«, und Dr.-Ing. J. Mathar für das Lehrgebiet »Festigkeitslehre, insbesondere Festigkeitslehre im Flugzeugbau«.

Am 20. Mai beging Herr Dr. Arthur Korn, o. Honorar-Professor an der Technischen Hochschule Charlottenburg, der Erfinder der Bildtelegraphie, unter Anteilnahme weiter Kreise seinen sechzigsten Geburtstag.

Hr. Prof. Dr. Th. Vahlen, früher in Greifswald, ist zum o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Wien ernannt worden.

Hr. Prof. Dr. H. Brandt, bisher an der Technischen Hochschule in Aachen, ist zum o. Professor der Mathematik an der Universität Halle ernannt worden.

Hr. Dr.-Ing. H. Craemer habilitierte sich an der Technischen Hochschule in Darmstadt als Privatdozent für höhere Elastostatik und Plastostatik in Anwendung auf das Bauingenieurwesen. 80

Hr. Ing. Edm. Altenkirch in Berlin-Neuenhagen wurde für seine Verdienste auf dem Gebiet des Kältemaschinenbaus von der Technischen Hochschule in Karlsruhe zum Dr.-Ing. e. h. promoviert.

(Redaktionsschluß 21. Juni 1930.)

Für die Schriftleitung verantwortlich: Professor Dr. von Mises, Berlin NW 87, Siegmundshof 9; für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 40. — VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7.
Druck von A. W. Schade G. m. b. H., Berlin N 65.